차 례

상 식

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 과학과 기술의 시대는 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 그것은 수학이 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 되기때문이다.

수학교육을 강화하면 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고력을 키워 그들의 창조적응용능력을 높은 수준에로 올려세울수 있다.

이리하여 수학교육은 사람들에게 자연과 사회를 개조하는데 필요한 지식과 방법을 가지게 할뿐만아니라 창조적응용능력을 키우는데서 중요한 자리를 차지한다.

수학을 잘 배워 그 지식과 방법을 잘 익히면 머리를 쓰는 힘이 커져서 아무리 복잡한 문제에 맞다들어도 그것을 해결할 방도와 묘리를 찾을수 있고 세계적인 발견과 발명도 척척 해나갈수 있다.

4학년 수학에서는 식에서도 지수식과 로그식, 삼각식과 같은 복잡한 식들을, 함수에서도 분수함수, 무리함수와 같은 새로운 함수들을 배우면서 분수, 무리방정식과 안갈기식 그리고 수렬을 새로 배운다. 그리고 닮음 도형, 도형에서의 크기관계와 같은 중요한 도형지식들을 배운다.

이 지식들은 중학교 수학에서 중요한 자리를 차지한다.

우리는 위대한 령도자 **김정일**원수님의 뜨거운 사랑을 가슴깊이 간직하고 조선을 위하여 배우고 또 배워 선군시대의 요구에 맞게 사회주의강성국가건설에 이바지할수 있는 수학지식과 방법을 소유하며 창조적응용능력을 키우기 위하여 적극 노력하여야 한다.

제1장. 도형의 닮음

제1절. 비례선분

1. 평행직선에서의 비례선분

알아보기 그림 1-1의 ㄱ)에서 $AB//CC_1$이면 $\triangle ABC$의 면적과 $\triangle ABC_1$의 면적은 같다.

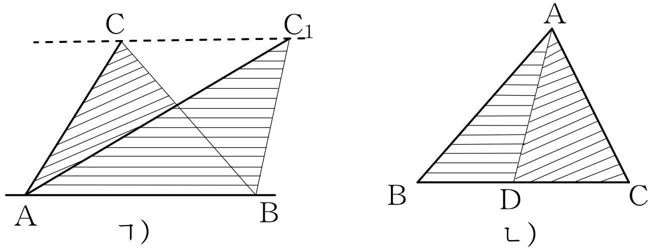


그림 1-1

그림 ㄴ)에서

$$\frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ADC)}=\frac{BD}{DC},\quad \frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ABC)}=\frac{BD}{BC}$$

인가? 여기서 $S(\triangle ABD)$는 $\triangle ABD$의 면적을 표시한 것이다.

> 정리 1. 3각형의 한 변에 평행인 직선은 다른 두 변을 비례하는 선분들로 나눈다.

조건. $\triangle ABC$에서 $DE//BC$($D\in AB$, $E\in AC$)

결론. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\left(\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\right)$

(증명) 첫째 비례식을 증명하자.

점 E와 B를 맺고 점 E에서 직선 AB까지의 거리를 h라고 하자.

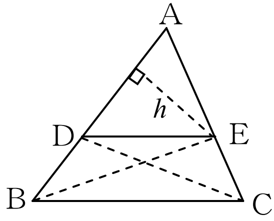


그림 1-2

$$\frac{S(\triangle ADE)}{S(\triangle DBE)}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot h}{\frac{1}{2}DB\cdot h}=\frac{AD}{DB} \quad (1)$$

마찬가지로

$$\frac{S(\triangle AED)}{S(\triangle DCE)}=\frac{AE}{EC} \quad (2)$$

그런데 DE//BC (조건)이므로

$$S(\triangle DBE)=S(\triangle DCE)$$

$$\frac{S(\triangle ADE)}{S(\triangle DBE)}=\frac{S(\triangle AED)}{S(\triangle DCE)}$$

따라서 식 (1)과 (2)로부터

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

나머지 두 비례식도 마찬가지로 증명된다.

알아보기 그림 1-3에서 $\ell // m // n$이면 $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ 인가?

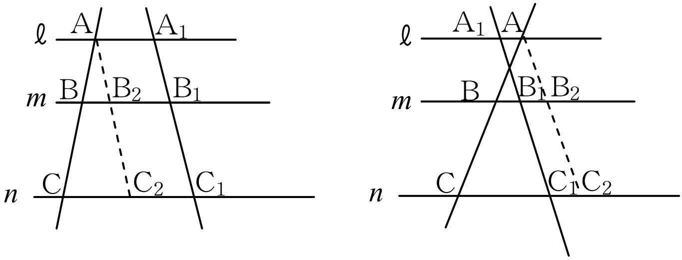


그림 1-3

계. 세 평행직선은 그것들과 사귀는 두 직선에서 비례하는 선분들을 끊어낸다.

문 제

1. 그림 1-4에서 $BB_1 // C_1C$이면

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$$

이다. 왜 그런가?(점 A를 지나며 BB_1에 평행인 직선을 긋고 생각하여보아라.)

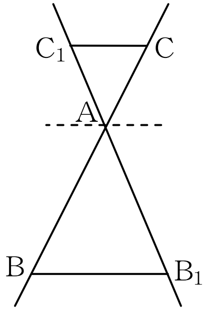


그림 1-4

2. △ABC에서 DE//BC (D∈AB, E∈AC)이고 AD=1.5cm, DB=2cm일 때 다음 비들의 값을 구하여라.

$$\frac{AD}{BD},\quad \frac{AD}{AB},\quad \frac{AE}{AC},\quad \frac{EC}{AC}$$

정리 2.(거꿀정리) 3각형의 두 변을 비례하는 선분들로 나누는 직선은 셋째 변에 평행이다.

조건. △ABC에서

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\left(\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\right)$$

결론. DE//BC

(증명) 점 D에서 BC에 평행인 직선을 긋고 AC와 사귀는 점을 E_1이라고 할 때 DE와 DE_1이 일치한다는것을 밝히면 된다.

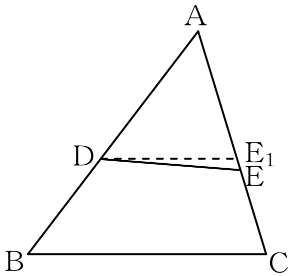


그림 1-5

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE_1}{AC}\ (\text{정리 }1)$$

그런데 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (조건)이므로

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AE_1}{AC},\ AE=AE_1$$

따라서 점 E는 E_1과 일치하며 DE는 DE_1과 일치한다.

문 제

1. △ABC에서 변 BA의 연장선에 점 D를 찍고 BC의 연장선에 점 E를 찍었다. 다음과 같은 경우에 AC//DE인가?
   1) AD∶AB=4∶3, BC=1.2m, BE=2.8m
   2) AD∶BD=8.5∶11, $BC=\frac{5}{17}CE$
2. △ABC의 아낙에 한 점 O가 있다. 선분 OA에 AK∶KO=1∶2인 점 K를 찍고 점 K에서 AB, AC에 각각 평행인 직선을 그어 OB 및 OC와 사귀는 점을 각각 L, M이라고 하면 BC∥LM이다. 증명하여라.

알아보기 △ABC의 변 AB를 3등분하고 그 나눔점 D_1, D_2를 각각 지나며 BC에 평행인 직선을 그어 AC와 사귀는 점을 각각 E_1, E_2라고 할 때 (그림 1-6)

1. 선분 $D_1E_1=1$이라고 하고 D_2E_2, BC의 길이를 D_1E_1로 표시해보아라.
2. $\frac{AD_1}{AB}=\frac{AE_1}{AC}=\frac{D_1E_1}{BC}$, $\frac{AD_2}{AB}=\frac{AE_2}{AC}=\frac{D_2E_2}{BC}$ 인가?

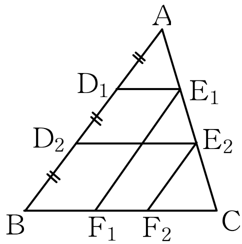


그림 1-6

정리 3. △ABC에서 DE//BC (D∈AB, E∈AC)이면

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

(증명) 그림 1-7에서 DE//BC(조건)이므로 정리 1과 계에 의하여

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \qquad (1)$$

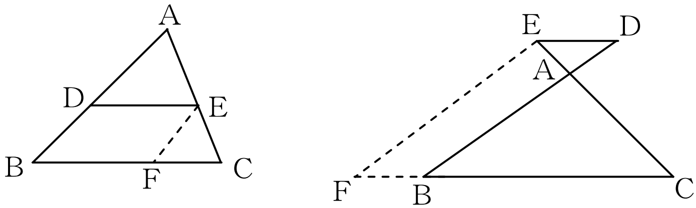


그림 1-7

점 E에서 AB에 평행인 직선을 긋고 직선 BC와 사귀는 점을 F라고 하면

$$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC} \qquad (\text{정리 } 1)$$

여기서 BF＝DE (평행4변형의 맞은변)이므로

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \qquad (2)$$

(1)과 (2)로부터

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

문 제

1. 한 점 O에서 사귀는 세 직선이 그림 1-8과 같이 평행인 직선과 사귀면 $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$, $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{AB}{BC}$ 이다. 왜 그런가?

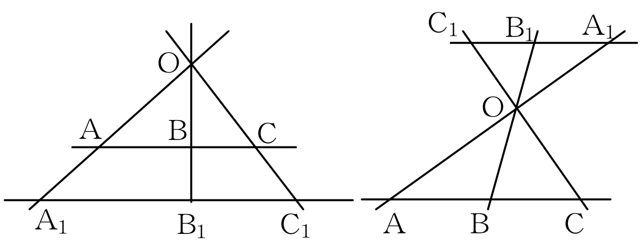


그림 1-8

2. 도면에서 거리를 정밀하게 잴 때 제형자를 쓴다. 그림 1-9에서 AB의 작은 한눈금은 1mm이다. 이 제형자를 쓰면 1mm 눈금 사이를 다시 10등분 하지 않아도 0.1mm까지 잴수 있다.

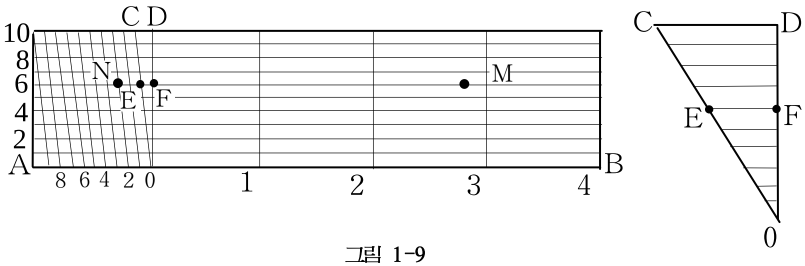


그림 1-9

1) 그림을 보고 선분 MN의 길이를 구하여라.

2) 그림에서 EF=0.6mm이다. 왜 그런가?

2. 비례선분그리기

례 1. 주어진 선분 AB를 2:3의 비로 나누어라.

그리기

① 점 A와 B로부터 서로 평행인 반직선들을 AB에 관하여 반대쪽에 긋는다.(그림 1-10)

② 거기에 같은 선분들을 A로부터 두개(AC), B로부터 세개(BD) 끊는다.

③ C와 D를 맺는다.

④ CD가 AB와 사귀는 점 P를 구한다.

이 점은 AB를 2:3으로 나눈다.

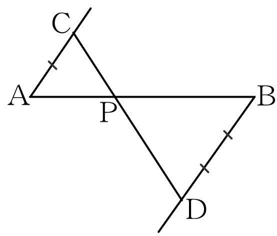


그림 1-10

선분 AB의 점 M에 대하여 AM:MB=a:b이면 점 M은 선분 AB를 a:b의 비로 **내분(아낙나눔)**한다고 말한다.(그림 1-11)

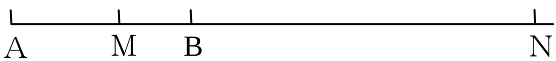


그림 1-11

선분 AB의 연장선의 점 N에 대하여 AN:BN=a:b이면 점 N은 선분 AB를 a:b의 비로 **외분(바깥나눔)**한다고 말한다.

례 2. 주어진 선분 AB를 3:5의 비로 줄여라.(그림 1-12)

그리기

① 한 끝점 A로부터 반직선을 하나 긋는다.

② 그 반직선에 점 A로부터 같은 선분을 5번 끊는다.

③ 다섯번째 나눔점 C를 B와 맺는다.

④ 세번째 나눔점 D를 지나며 CB에 평행인 직선을 그어 AB와 사귀는 점 B_1을 구한다.

$AB_1:AB=3:5$

AB_1이 구하려는 선분이다.

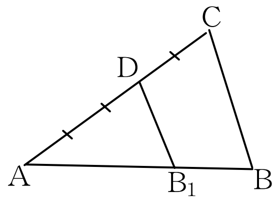


그림 1-12

문 제

1. 선분 AB를 하나 긋고 다음과 같은 비로 나누어라.

1) 3:4　　　2) 5:3

3) 2.5:2　　4) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$

2. 선분 AB를 하나 긋고 그것을 다음과 같은 비로 외분 및 내분하여라.

1) 3:2　　2) 2:1　　3) 5:2　　4) 3:8

련습문제

1. 지점 A에서 강건너편에 보이는 지점 B까지의 거리를 알려고 그림 1-13에서와 같이 점 B_1, C_1, C를 정하고 A로부터 그 점들까지의 거리를 재였다. $CC_1 \perp AC_1$, $BB_1 \perp AB_1$이고 AC=4.5m, AC_1=3.5m, C_1B_1=10m일 때 AB는 얼마인가?

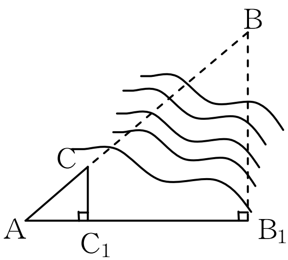


그림 1-13

2. △ABC의 변 BC에 평행인 직선이 다른 두 변과 사귀는 점을 각각 B_1, C_1이라고 하면 $\triangle AB_1C_1$과 △ABC에서 BC, B_1C_1의 비는 그 변들에 그은 높이의 비와 같다. 증명하여라.
3. 총으로 목표판을 겨눌 때(그림 1-14에서 A는 조문, M은 조성의 중심, N은 조준점) 조성의 중심 M이 1mm 편차되게 조준하면 총알이 목표판에 얼마나 빗맞겠는가? AM=38cm, AN=100m로 보고 계산하여라.

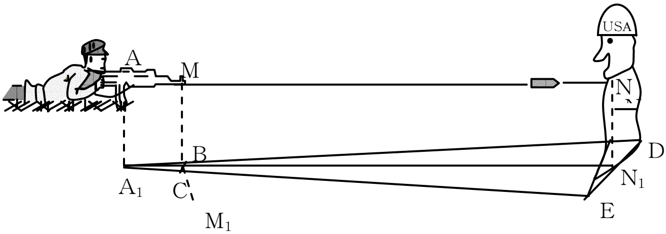


그림 1-14

4. 학생이 나무의 높이를 재기 위하여 그림 1-15와 같이 삼각자의 빗변의 연장선이 나무의 꼭대기 C를 지나도록 하였다. ($AB_1//A_0C_0$) B_1B=30cm, B_1A=40cm, 학생으로부터 나무밑까지의 거리 A_0C_0=16m, 그 학생의 눈까지의 높이 AA_0=1.5m일 때 나무의 높이를 구하여라.

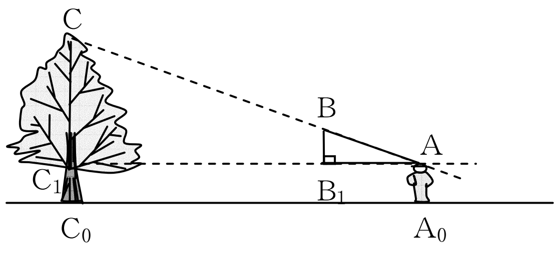


그림 1-15

5. △ABC의 정점 A에서 그은 높이를 AD라고 할 때 BD=15m, DC=27m, AC=45m이다. BC의 수직2등분선이 직선 AC와 사귀는 점을 E라고 할 때 선분 AE의 길이를 구하여라.
6. 4각형 ABCD의 한 변 AB의 임의의 한 점 A_1에서 대각선 AC에 평행인 직선을 그어 BC와 사귀는 점을 B_1, B_1에서 BD

에 평행인 직선을 그어 CD와 사귀는 점을 C_1, C_1에서 CA에 평행인 직선을 그어 AD와 사귀는 점을 D_1이라고 할 때 4각형 $A_1B_1C_1D_1$이 평행4변형이라는것을 증명하여라.

7. 그림 1-16에서 BD=DC이고 AD//GE이다.
이때 다음것을 증명하여라.

1) $\frac{AG}{AC}=\frac{ED}{BD}$

2) $\frac{AG}{AF}=\frac{AC}{AB}$

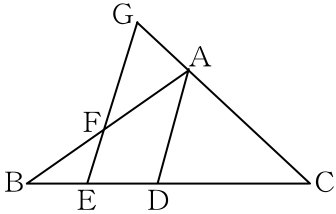


그림 1-16

8. △ABC의 변 BC에 $BE=\frac{1}{3}BC$ 되게 점 E를 찍고 변 AC의 가운데점을 D라고 하면 BD는 AE에 의하여 2등분된다. 증명하여라.

제2절. 닮음도형

1. 닮음도형





알아보기 그림 1-17은 어떤 지역의 략도인데 크기가 서로 다르다. 대응하는 두쌍의 지점들과 각들을 재고 거리들의 비와 각들의 크기를 비교하여보아라.

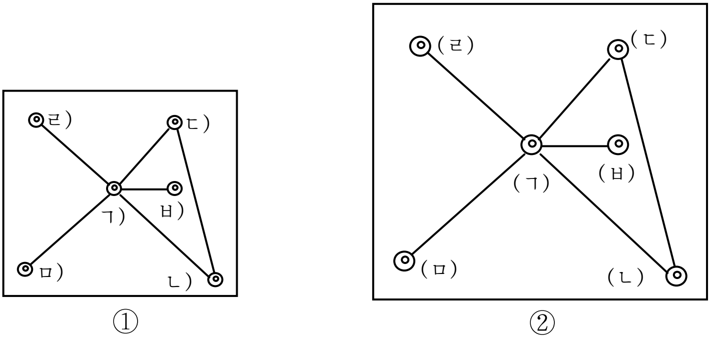


그림 1-17

두 도형에서 대응하는 선분들의 비가 다 같고 대응하는 각들의 크기가 같을 때 그 두 도형은 **닮았다**고 말한다.

두 도형 F와 F_1이 닮았다는것을

$$F \backsim F_1$$

과 같이 표시한다.

닮은 두 도형에서 대응하는 선분들의 비를 **닮음비**라고 부른다.

문 제

1. 그림 1-17에서 ①에 대한 ②의 닮음비가 2이라면 ②에 대한 ①의 닮음비는 얼마인가?

2. 축척 1:300 000인 지도에서 실제거리 450km는 얼마의 길이로 나타나겠는가?

3. 도형 F에 대한 도형 F_1의 닮음비는 3, 도형 F_1에 대한 F_2의 닮음비를 2이라고 할 때

1) F에 대한 F_2의 닮음비는 얼마인가?

2) F_2에 대한 F_1의 닮음비, F_1에 대한 F의 닮음비는 얼마인가? 또 F_2에 대한 F의 닮음비는 얼마인가?

2. 중심닮음변환

알아보기 아래의 두 그림에서 작은 도형에 대한 큰 도형의 닮음비는 2이다.

1) 그림 1-18에서 점 M에 대응하는 점 M_1을 구하여라.

2) 그림 1-19에서 비 $A_1D_1:AD$, $D_1C_1:DC$는 얼마인가? $\angle A$와 $\angle A_1$를 비교하여라.

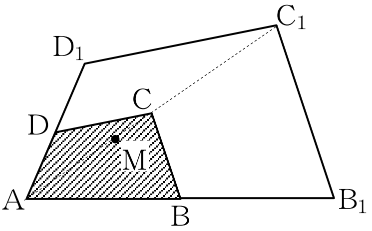


그림 1-18

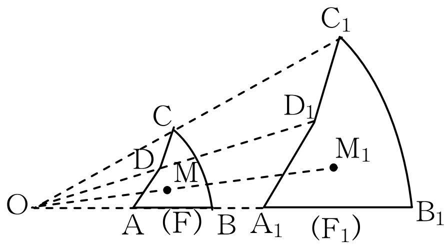


그림 1-19

평면에 한 점 O와 정수 k가 정해졌을 때 도형 F의 매 점 A를 반직선 OA에서 $OA_1 = kOA$로 되는 점 A_1로 넘기는것을 점 O를 **닮음중심**으로 하고 수 k를 **중심닮음비**로 하는 **중심닮음변환**이라고 부른다. 그리고 이것을 간단히 중심닮음변환 (k, O)로 표시한다.

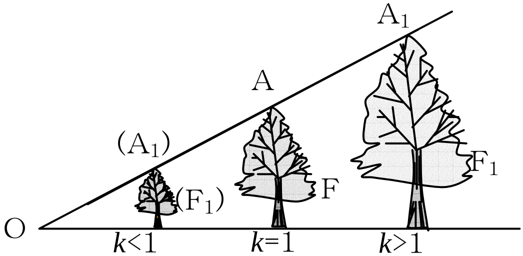


그림 1-20

여기서

$k>1$이면 F_1은 F를 k배로 늘인 도형,

$k<1$이면 F_1은 F를 k배로 줄인 도형,

$k=1$이면 F_1은 F와 일치하는 도형이다.(그림 1-20)

중심닮음변환에 의하여 선분은 그에 평행인 선분으로 넘어가고 각은 같은 크기의 각으로 넘어간다.

문 제

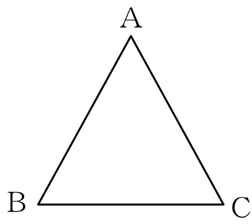


그림 1-21

1. 그림 1-21과 같이 된 도형을 다음과 같이 각각 중심닮음변환하여라.

   1) 중심닮음변환 (3, B)

   2) 중심닮음변환 $\left(\frac{1}{2},\ \ C\right)$

   3) 중심닮음변환 $\left(\frac{2}{3},\ \ C\right)$

2. 다음 도형들을 주어진 점에 대하여 중심닮음변환하여라.

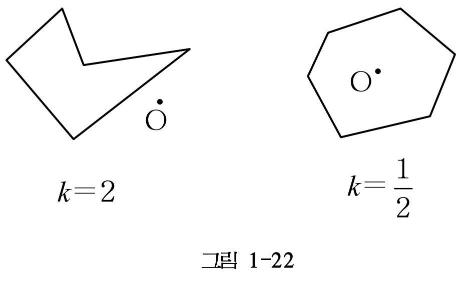
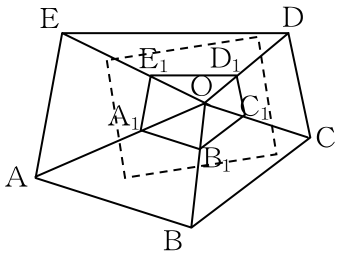


그림 1-22

3. 논밭이나 건설물터전 같은것의 도면을 그리려고 할 때 평판측량을 한다.

   그림 1-23은 평판측량에서 구역 ABCDE의 줄인 그림(닮음도형)을 그리는 한 방법을 보여주고있다.



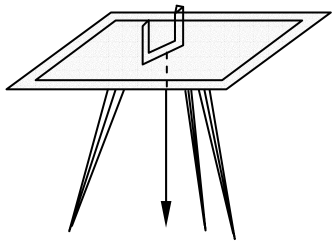


그림 1-23

1) 이때 측량기의 추가 가리키는 곳은 거리를 재는 기준점이다. 이 점은 도면에서 무슨 점에 해당하겠는가?

2). 축척 1:1 000으로 그리기 위하여서는 중심닮음비를 얼마로 잡아야 하는가?

중심닮음변환을 리용하는 그리기문제를 보자.

례. 중심각이 뾰족각인 부채형 OAB가 있다. 바른4각형 CDEF를 그리는데 변 DE는 반경 OB에 놓이고 정점 C, F는 각각 반경 OA, 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이도록 하여라.

그리기

① 정점 D_1, E_1이 반경 OB에, 정점 C_1이 반경 OA에 놓이는 어떤 바른4각형 $C_1D_1E_1F_1$을 그린다.
(점 F_1이 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이는 조건제외)

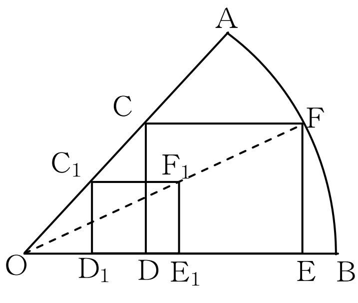


그림 1-24

② 바른4각형 $C_1D_1E_1F_1$을 중심닮음변환하여 정점 F_1의 대응점 F가 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이게 하자.
이때 얻어지는 4각형 CDEF는 주어진 조건을 만족시키는 바른4각형이다. (그림 1-24)

문 제

1. △ABC에서 $\angle B=45°$, $\angle C=60°$, 높이 AH＝3cm이다. 그 3각형을 그려라.
2. △ABC에서 AB:AC＝3:2, $\angle A=60°$이고 가운데선 AM＝3cm이다. 그 3각형을 그려라.

3. 3각형의 닮음조건

두 3각형에서 대응하는 각이 다 같고 대응하는 변들의 비가 다 같으면 두 3각형은 닮은 3각형이다.

그러나 매번 이런 조건을 다 알아보고 닮음을 알아내는것은 불편하다.

이런 조건들가운데서 몇가지만 알아보고도 닮음을 알아낼수가 있다.

3각형의 합동조건 《세변조건》, 《변각변조건》, 《각변각조건》에 따르는 3각형의 닮음조건을 보자.

> **정리 1.** 두 3각형에서 세쌍의 대응변의 비가 다 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

조건. △ABC와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

결론. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

(증명) $A_1B_1=AB_2$, $A_1C_1=AC_2$인 점 B_2, C_2을 AB, CA에 찍으면 조건에 의하여 (그림 1-25)

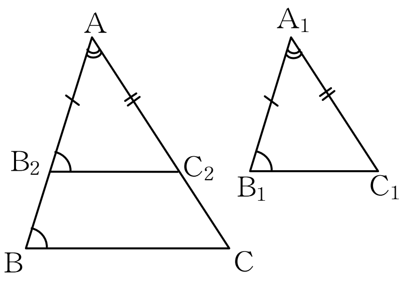


그림 1-25

$$\frac{AB_2}{AB}=\frac{AC_2}{AC}$$

따라서 $B_2C_2 /\!/ BC$이고 $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$

따라서 $\dfrac{AB_2}{AB}=\dfrac{B_2C_2}{BC}$

그런데 $AB_2=A_1B_1$이므로 $B_2C_2=B_1C_1$이다.

즉 $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle AB_2C_2$

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

문 제

1. 두 3각형의 변들이 다음과 같을 때 그 두 3각형은 닮았겠는가?

1) 4cm, 5cm, 6cm; 8cm, 10cm, 12cm

2) 2m, 3m, 1.5m; 9cm, 45mm, 6cm

3) 1.5m, 2m, 3m; 2.5m, 2m, 2.5m

2. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

이고 $\angle A=17°\ 2'$, $\angle B=67°\ 35'$ 이다. $\angle C_1$를 구하여라.

정리 2. 두 3각형에서 두쌍의 대응변의 비가 같고 그사이의 각이 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

(증명) 변 AB, AC에 $A_1B_1=AB_2$, $A_1C_1=AC_2$인 점 B_2, C_2을 찍고 선분으로 맺자.
그러면 $\triangle AB_2C_2 \equiv \triangle A_1B_1C_1$(변각변조건)

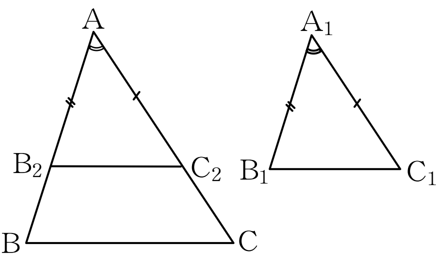


그림 1-26

조건에 의하여

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$$

따라서

$$\frac{AB_2}{AB}=\frac{AC_2}{AC}$$

따라서 $B_2C_2 /\!/ BC$

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

정리 2로부터 두 직3각형에서의 닮음조건을 다음과 같이 말할 수 있다.

두 직3각형에서 빗변들의 비와 한쌍의 대응하는 직각변들의 비가 같으면 그 두 직3각형은 닮았다.

문 제

1. 1) 두 직3각형에서 대응하는 직각변들의 비가 같으면 그 두 직3각형은 닮았다. 왜 그런가?

2) 두 2등변3각형에서 정각들이 같으면 그 두 2등변3각형은 닮았다. 왜 그런가?

2. 그림 1-27에서 닮은 3각형들을 골라내여라.

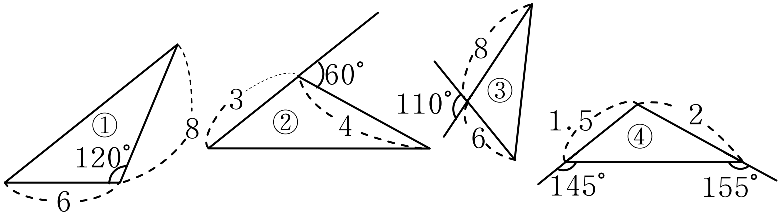


그림 1-27

3. 직3각형 ABC에서 직각을 낀 변 AB, AC를 한 변으로 하는 바른3각형 ABD, ACE를 바깥쪽에 만들고 A로부터 빗변 BC에 내린 수직선의 밑점을 H라고 할 때 △BDH∽△AEH임을 증명하여라.

> **정리 3.** 두 3각형에서 두쌍의 대응하는 아낙각이 각각 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

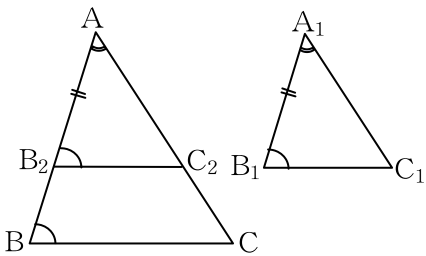


그림 1-28

조건. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$ 에서 $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$

결론. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (그림 1-28)

(증명) AB에 $AB_2=A_1B_1$인 점 B_2를 찍고

$\angle AB_2C_2=\angle B_1$되게 반직선 B_2C_2을 그어 AC와 사귀는 점을 C_2이라고 하자.

그러면 $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle AB_2C_2$ (각변각조건)

이때 $\angle B=\angle AB_2C_2$이므로 $B_2C_2 \parallel BC$

따라서 $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$

따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

두 4각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$에서 대응하는 변의 비가 같고 대응하는 각이 같으면 그 두 4각형은 닮은 4각형이다. 즉

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1A_1}{DA} \\ \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1 \\ \angle C=\angle C_1,\ \angle D=\angle D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{4각형 } ABCD \backsim \\ \quad \text{4각형 } A_1B_1C_1D_1\end{array}$$

문 제

1. 그림 1-29에서 닮은 3각형을 골라내여라.

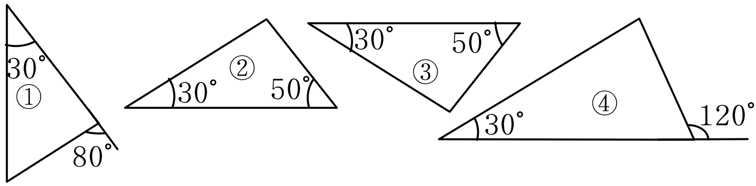


그림 1-29

2. 2등변3각형 ABC의 밑변 BC의 끝점 B에서 맞은변에 수직선 BD를 그으면 $BC^2 = 2AC \cdot CD$임을 증명하여라.
3. △ABC에서 변 AB의 한 점 D에서 ∠ADE=∠C로 되게 반직선을 그어 변 AC와 사귀는 점을 E라고 하면 △ADE∽△ABC이다. 증명하여라.
4. 변의 개수가 같은 두 바른다각형은 닮은 다각형이다. 증명하여라.

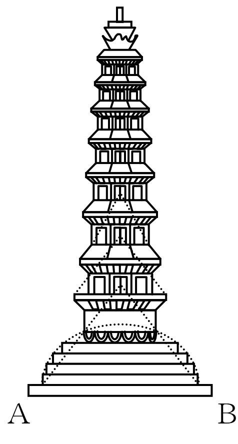
상 식

고려시기 돌탑의 기하학적원리

그림은 고려시기 돌탑인 홍복사 6각평면의 7층탑이다. 탑의 기단너비 AB를 직경으로 하는 원을 그리면 매 기단들의 끝부분이 이 원둘레에 놓인다.

기단너비 AB를 밑변으로 하는 바른 3각형을 그리면 정점이 1층 몸돌중심에 놓인다. 지붕돌폭을 밑변으로 하는 바른 3각형을 그리면 다음 층의 지붕끝 중심에 정점이 놓인다.

이때 그려지는 3각형들의 닮음비를 가지고 탑의 매 부분들이 우로 올라가면서 축소되여 탑이 이루어졌다.



4. 닮음도형의 둘레와 면적

알아보기 1. △ABC∽$\triangle A_1B_1C_1$일 때 그 3각형들의 둘레의 비가 닮음비와 같겠는가?

2. △ABC∽$\triangle A_1B_1C_1$일 때 $\frac{B_1C_1}{BC}=k$ 이면

$\frac{S(\Delta A_1B_1C_1)}{S(\Delta ABC)}=k^2$ 이겠는가?

닮은 두 다각형의 둘레의 비는 닮음비와 같다.

닮은 두 다각형의 면적의 비는 닮음비의 2제곱과 같다.

이 성질은 일반적으로 닮은 곡선도형에 대해서도 그대로 성립한다.

문 제

1. 중심닮음변환 (3, O)에 의하여 변의 길이가 각각 17cm, 23cm, 21cm인 △ABC가 $\triangle A_1B_1C_1$로 되였다. $\triangle A_1B_1C_1$의 둘레를 구하여라.
2. 위대한 령도자 **김정일**원수님의 크나큰 은정속에 여러가지 유희시설을 갖춘 현대적인 공원이 또 새로 건설되였다. 이 공원의 모양을 축척 1:4 000으로 그린 도면에서 그의 둘레가 120cm이다. 이 공원의 실제 둘레를 구하여라.
3. 위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 우리 나라의 땅들을 사회주의조선의 땅답게 전변시킬데 대한 웅대한 토지정리구상을 펼쳐주시였다.
그림 1-30은 축척이 1:10 000인 도면이다. 토지를 정리하여 빗선을 친 부분의 논을 직4각형모양으로 만들었다. 실제로 늘어난 면적을 눈금자로 재여서 대략 구하여라.

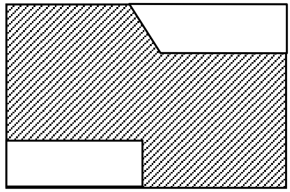


그림 1-30

련습문제

1. 그림 1-31은 도형을 늘이거나 줄일 때 쓰는 확대기의 원리를 보여주고있다.

S를 고정하고 바늘 A를 주어진 도형을 따라 움직여가면 연필끝(E)은 닮은 도형을 그린다. 여기서 △CSE와 △DSA는 2등변3각형이고 4각형 ABCD는 평행4변형으로 되여있다.

1) ∠C가 달라져도 늘 △SDA∽△SCE이다. 왜 그런가?

2) 점 S, A, E는 늘 한 직선에 놓이는가?

3) $\frac{SD}{SC}=\frac{2}{5}$로 되게 맞추면 중심닮음비 $\frac{SE}{SA}$는 얼마로 되겠는가?

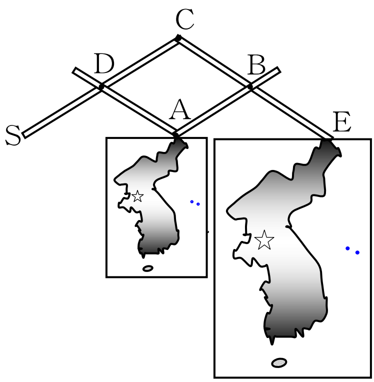


그림 1-31

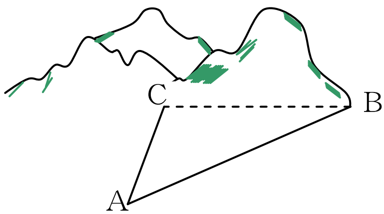


그림 1-32

2. 그림 1-32에서와 같이 두 지점 B와 C사이의 거리를 알아내기 위하여 AB=500m, AC=240m, ∠A=40° 를 재였다.

축척 1:10 000인 줄인 그림을 그리고 BC를 재여서 실제 거리를 구하여라.(10의 자리까지)

3. 2등변3각형 ABC의 정점 A에서 그은 높이 AM, 밑변의 한 끝점 B에서 그은 높이를 BD라고 하면 △BCD∽△AMC이다. 증명하여라.

4. 제형 ABCD(AD//BC)에서 두 대각선의 사귐점을 O라고 하자. 여기서 CO:OA=0.3:$\frac{2}{3}$이고 중간선의 길이가 29cm일 때 두 밑변을 구하여라.

5. 평행4변형 ABCD를 하나 그리고 정점 A를 지나며 변 BC와 사귀는 한 직선을 그어라. 이 직선이 대각선 BD, 변 BC, 변 DC의 연장선과 사귀는 점을 각각 M, N, P라고 하여라. 이 도형에서
   1) 닮은 3각형들을 모두 찾아라.
   2) MN∶AM＝AM∶PM
   이다. 증명하여라.
6. △AOD에서 ∠AOD＝90°, AO＝$\frac{1}{3}$OD, 변 OD에 점 B, C를 OA＝OB＝BC＝CD 되게 정하면 △BAC∽△BAD이라는것을 증명하여라.
7. 바른제형 ABCD(AD//BC)에서 AB∶BC＝1∶2, ∠B＝70°, BD=4cm이다. 이 제형을 그려라.
8. 뾰족3각형 ABC가 주어졌다. 직4각형 MNPQ를 그리는데 MN∶NP＝2∶3이고 점 M은 변 AB, 변 NP는 변 BC에, 정점 Q는 변 AC에 놓이게 그려라.
9. △ABC에서 ∠A의 2등분선이 BC 및 외접원과 사귀는 점을 D, E라고 하면 AB·AC＝AD·AE이다. 증명하여라.

제3절. 삼각비

1. 시누스

알아보기 α가 커질 때 $\frac{BC}{AB}$의 값은 커지겠는가 작아지겠는가? 분모 AB의 길이를 정해놓고 생각하여보아라.

$\frac{BC}{AB}$의 값이 비탈진 정도를 나타낸다고 말할수 있는가?(그림 1-33)

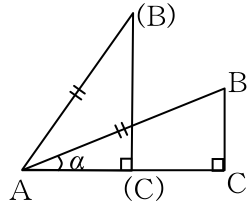


그림 1-33

직3각형에서 뾰족각 α의 맞은변과 빗변과의 비

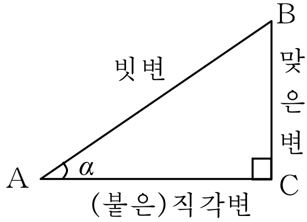
$$\frac{\text{맞은변}}{\text{빗변}}$$

을 각 α의 **시누스**라고 부르고 이것을

$$\sin\alpha$$

와 같이 쓴다. 즉

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$



문 제

1. 그림 1-34에서 원의 반경은 10cm, 한 눈금은 2mm이다.

1) $\sin 20°$, $\sin 70°$의 값은 대략 얼마인가?
그림을 보고 0.01의 자리까지 구하여라.

2) $\sin\alpha(0°<\alpha<90°)$의 값은 1보다 작은 정수이다.
왜 그런가?
α가 0°에서 90°까지 커질 때 $\sin\alpha$의 값은 어떻게 변하는가?

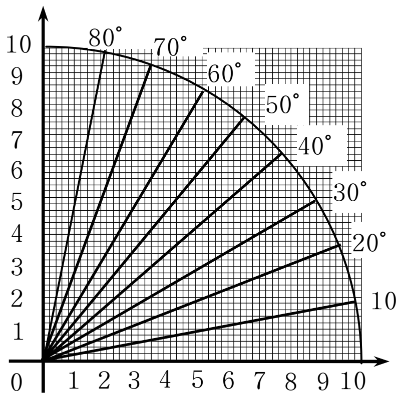


그림 1-34

2. 직3각형 MNP(∠N=90°)에서 ∠P=α일 때 $\sin\alpha$를 변들의 비로 표시하여라.

례. 높이가 15m인 나무가 23°로 보였다. 나무꼭대기까지의 거리를 구하여라.

(풀이) $\sin 23° = \dfrac{AB}{OB}$

$$OB = \frac{AB}{\sin 23°}$$

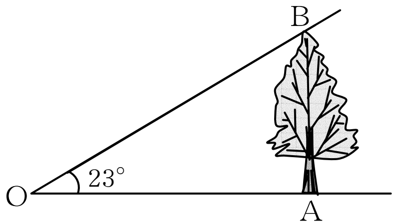


그림 1-35

sin23° 를 수표에서 찾으면 0.390 7이다.
따라서

$$\mathrm{OB} \approx \frac{15}{0.4} = 37.5(\mathrm{m})$$

문 제

1. 그림 1-36에서 ∠P=55°, NP=10cm 일 때 MN의 길이는 얼마인가?

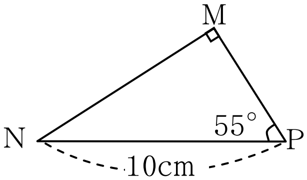


그림 1-36

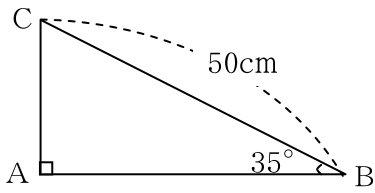


그림 1-37

2. 그림 1-37에서 ∠B=35°, BC=50cm일 때 AC의 길이는 얼마인가?
3. 기구가 바람에 의하여 25° 기울어졌다.(그림 1-38) 기구를 잡고있는 끈의 길이는 120m 이다. 이 기구가 땅에서 얼마의 높이에 있겠는가?

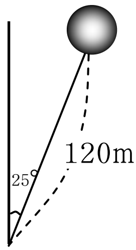


그림 1-38

2. 코시누스

직3각형에서 뾰족각 α에 붙은 직각변과 빗변과의 비

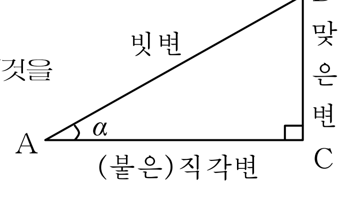
$$\frac{(붙은)직각변}{빗변}$$

을 각 α의 **코시누스**라고 부르고 이것을

$$\cos\alpha$$

와 같이 쓴다. 즉

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$



∠A의 시누스, 코시누스를 간단히 sinA, cosA와 같이 쓴다.

알아보기 1. 그림 1-39를 보고 sinA, cosA, sinC, cosC를 각각 변들의 비로 표시하여라. 이것들가운데 같은것이 있는가 알아보아라.

2. $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$,

$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$

이다. 왜 그런가?

∠A+∠C = 90° 라는것을 알고 생각하여라.

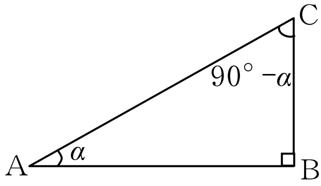


그림 1-39

두 뾰족각의 합이 90° 일 때 그 두 각을 서로 다른 각의 **남은각**이라고 부른다.

어떤 각의 시누스값은 그 남은각의 코시누스값과 같다.

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha),\ \sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$$

문 제

1. 1) 그림 1-34를 보고 cos20° , cos50° , cos70° 의 값을 구하여라. (0.01의 자리까지)

2) $\cos\alpha$ ($0°<\alpha<90°$)의 값은 1보다 작은 정수이다. 왜 그런가? α의 값이 0°에서 90°까지 커질 때 $\cos\alpha$의 값은 어떻게 변하는가?

2. 직3각형 MNP(∠N=90°)에서 ∠P=α일 때 $\cos\alpha$를 변들의 비로 표시하여라.

례. 그림 1-40을 보고 포진지에서 비행기까지의 거리를 구하여라.

(풀이) 그림 1-40의 직3각형 AOB에서

$$\cos 38° = \frac{OB}{AO}$$

$$AO = \frac{OB}{\cos 38°} \approx \frac{2000}{0.788} \approx 2538(m)$$

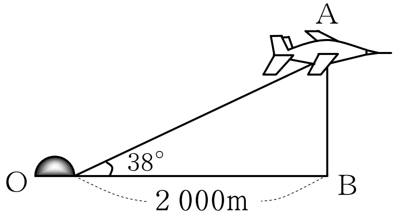


그림 1-40

문 제

1. 그림 1-41에서 ∠B=60°, BC=50㎝일 때 AB의 길이는 얼마인가?

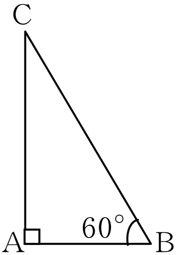


그림 1-41

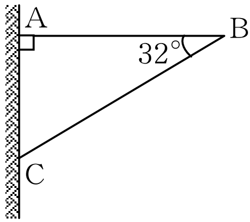


그림 1-42

2. 벽에 수직인 틀 AB에 받침대 BC를 그림 1-42에서와 같이 대였다. AB=60㎝이고 ∠B=32°일 때 BC의 길이를 구하여라.

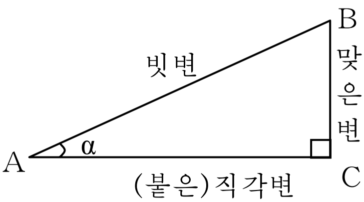
3. 탕겐스

직3각형에서 뾰족각 α의 맞은변과 α에 붙은 직각변과의 비

$$\frac{\text{맞은변}}{\text{(붙은)직각변}}$$

을 각 α의 **탕겐스**라고 부르고 이것을 $\tan\alpha$ 와 같이 쓴다. 즉

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$$



문 제

1. 그림 1-34를 보고 tan20°, tan50°, tan70°의 값을 구하여라.

2. α의 값이 0°에서 90°까지 커질 때 $\tan\alpha$의 값은 어떻게 변하는가?

례. 위대한 령도자 **김정일**원수님의 현명한 령도에 의하여 건설된 주체사상탑의 높이는 170m이다. 그림 1-43에서 OB를 구하여라.

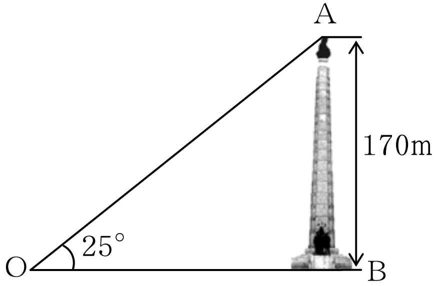


그림 1-43

(풀이) 직3각형 AOB에서

$$\tan 25° = \frac{AB}{OB}$$

$$OB = \frac{AB}{\tan 25°} \approx \frac{170}{0.4663} \approx 364.57(m)$$

문 제

1. 그림 1-44에서 $\angle\alpha$에 붙은 직각변 b=50㎝이고 $\angle\alpha$가 다음과 같을 때 맞은변 a의 길이는 얼마인가?

1) 20° 2) 50° 3) 80°

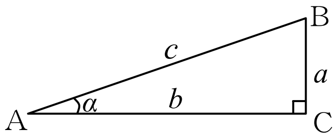
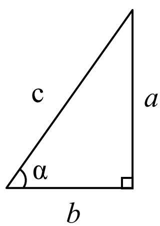


그림 1-44

2. 호두나무의 그림자의 길이가 8m이고 나무의 꼭대기를 지나는 태양빛이 땅과 이루는 각이 58°였다. 나무의 높이를 구하여라.

> 시누스, 코시누스, 탕겐스를 통털어 **삼각비**라고 부른다.
>
> $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c\sin\alpha$
>
> $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c\cos\alpha$
>
> $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $a = b\tan\alpha$
>
> 
>

련습문제

1. 다음것을 구하여라.

1) $\sin 42°$ 2) $\sin 58°$ 3) $\cos 73°$ 4) $\cos 65°$

2. α를 구하여라.

1) $\cos\alpha = 0.8059$ 2) $\sin\alpha = 0.6046$

3) $\cos\alpha = 0.9664$ 4) $\sin\alpha = 0.9573$

3. 두 변이 각각 50cm, 16cm이고 그 두 변사이의 각이 $38° 48'$인 3각형이 있다. 이 3각형의 면적은 얼마인가?

4. 반경이 10cm인 원에 내접하는 바른9각형의 한 변의 길이를 구하여라.

5. 반경이 10cm인 원에 내접하는 바른10각형의 둘레를 구하여라.

6. 경사각이 $21°$인 비탈길을 A에서 B로 곧바로 올라가는 길은 $46°$의 각을 이루고 비스듬히 20m만큼 올라갔다.(그림 1-45)

1) 처음의 지점에서 몇m의 높이만큼 올라갔는가?

2) 결국은 경사각이 몇도인 길을 올라갔는가?

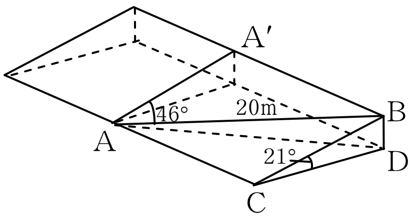


그림 1-45

7. 그림 1-46는 지붕의 옆모양을 간단히 그린것이다.

지붕물매가 $\angle\alpha = 20°$이고 BD=18m일 때 AB의 길이를 구하여라.

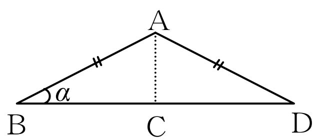


그림 1-46

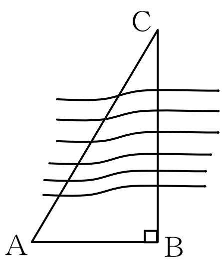


그림 1-47

8. 점 B에서 강건너편에 있는 점 C까지의 거리를 알기 위하여 ∠ABC＝90° 로 되게 점 A를 정하고 ∠CAB의 크기와 AB의 길이를 재였다.(그림 1-47)
∠CAB＝67°, AB＝40m일 때 BC는 얼마인가?
9. 한 원에서 중심각 25° 를 보는 활줄의 길이가 120cm일 때 그 원의 직경을 구하여라.

복습문제

1. △ABC에서 AC에 평행인 직선이 변 AB와 사귀는 점을 D, BC와 사귀는 점을 E라고 할 때 AB＝24cm, BC＝32cm, AC＝28cm, AD＋CE＝1.6cm이면 DE의 길이는 얼마인가?
2. 제형의 한 옆변을 4등분하고 매 등분점을 지나며 밑변에 평행인 직선을 다른 옆변과 사귈 때까지 그었다. 두 밑변이 각각 50cm 및 30cm일 때 옆변들사이에 있는 평행인 선분들의 길이를 구하여라.
3. 제형의 한 옆변을 n등분하고 그 매 등분점을 지나며 밑변에 평행인 직선을 다른 옆변과 사귈 때까지 그었다. 두 밑변이 a, $b(a<b)$일 때 두 옆변사이에 있는 평행인 선분들의 길이를 구하여라.
4. 직3각형 ABC(∠A＝90°)의 변 AB, AC를 각각 한 변으로 하여 두 바른4각형 ABDE, ACFG를 그 3각형의 밖에 그리고 AB와 CD의 사귐점을 P, AC와 BF의 사귐점을 Q라고 하였다. 이때 AP와 AQ를 비교하여라.
5. 1) 제형 ABCD(AD//BC, 그림 1-48의 ㄱ)에서 변 AB에 AP∶PB =m∶n으로 되게 점 P를 찍고 P를 지나며 밑변들에 평행인 직선을 그어 변 CD와 사귀는 점을 Q라고 하면

$$\mathrm{PQ}=\frac{m\mathrm{BC}+n\mathrm{AD}}{m+n}$$

이다. 증명하여라.

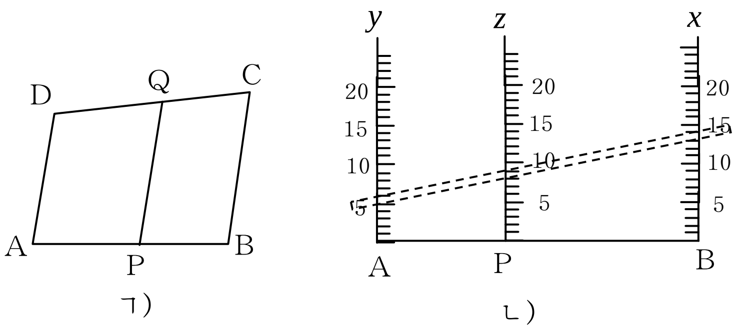


그림 1-48

2) 이 그림에서 BC=x, AD=y , PQ=z라고 놓으면 $z=\dfrac{mx+ny}{m+n}$

를 얻는다.

이 식에서 m과 n의 값을 미리 정해놓으면 x, y의 값에 의해 z 의 값을 구할수 있다. 그림 1-48의 ㄴ)는 이 원리를 써서 만든 계산도표이다.(여기에서 AP : PB = 2 :3)

x, y를 알고 도표에서 z를 구하는 방법을 설명하여라.

6. 한 기계부분품의 도면이 두개 있다. 첫째 도면 F는 늘인 그림인데 그 축척이 1:2이고 둘째 도면 F_1은 줄인 그림인데 그 축척은 $1:\dfrac{1}{5}$이다. 도형 F에 대한 F_1의 닮음비를 구하여라.

7. 3각형 ABC의 변 BC에 2BD=DC인 점 D가 있다. ∠ABC=45°, ∠ADC=60° 일 때 ∠ACB를 구하여라.

8. △ABC의 두 높이를 BD, CF라고 하면 △ABD∽△ACF이다. 증명하여라.

9. 은행나무의 그림자가 7m일 때 수직되게 세운 1m의 길이를 가진 말뚝의 그림자는 0.5m였다. 그 나무의 높이를 구하여라.

10. △ABC의 변 BC에 한 점 D를 찍었는데 AD에 의하여 나누이는 두 3각형이 닮았다고 한다. 이때 △ABC는 직3각형 또는 2등변3각형이라는것을 증명하여라.

11. 원에서 두 활줄 AB와 CD가 사귀는 점을 M이라고 하면 △ACM∽△DBM이다. 증명하여라.

12. 원밖의 한 점 M에서 접선 MC(접점 C)와 가름선 MAB(사귐점 A, B)를 그으면 △MAC∽△MCB이다. 증명하여라.

13. 가로, 세로의 비가 3:2이고 대각선의 길이가 4cm인 직4각형을 그려라.

14. 1) △ABC에서 높이 AH=4cm, BC=6cm, AB=5cm이다. 이 3각형을 그려라.

2) 1)에서 직4각형 DEFG의 정점 E는 변 AB에, F는 변 AC에, G와 D는 변 BC에 놓여있다. AE=$x$cm라고 하고 변 EF와 DE의 길이를 x로 표시하여라.

3) 이때 직4각형 EFGD의 둘레와 면적을 구하여라.

4) 그 면적이 가장 커지는 x의 값을 구하여라.

5) EFGD가 바른4각형으로 되는 x의 값을 구하여라.

15. 영웅적조선인민군의 한 해안방어진지에서 철천지원쑤 미제의 간첩선을 단발에 격침시켰다. 이때 진지의 높이는 바다기준 150m, 내려다보는 각은 8° 였다고 한다. 진지로부터 간첩선이 격침된 곳까지의 수평거리를 구하여라.

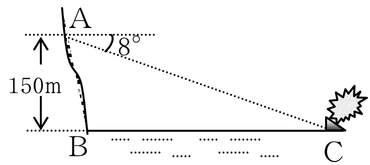


그림 1-49

16. 한 변이 6cm인 바른10각형의 내접원과 외접원의 반경을 구하여라.(1mm의 자리까지)

17. 직3각형 ABC(∠A = 90°)를 BC=3AC=6cm로 되게 그리고 높이 AD를 그어라. 이때

1) cosC를 구하여라.

2) 선분 AC와 CD의 비, 선분 AB와 AD의 비를 구하여라.

18. 직3각형 ABC $(\angle A=90°)$에서 높이 AD를 그었다. $AB=m\cdot BD$ $(m>1)$일 때 AB와 BC의 비, AC와 AD의 비를 구하여라.

19. 그림 1-50과 같이 지점 A, D에서 나무의 꼭대기 C를 올려다보는 각은 각각 31°, 14° 였다. AD=96m일 때 강의 너비 AB를 구하여라.

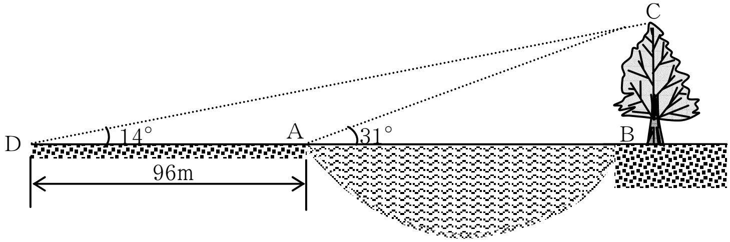


그림 1-50

상식

피다고라스와 피다고라스학파

우리는 기하학이라고 하면 피다고라스정리를 특별히 생각하게 된다.

피다고라스(B.C. 572-B.C. 492)는 기하학건설에서 공적을 남긴 고대 그리스의 수학자이다.

그는 피다고라스학파를 조직하고 운영하였는데 피다고라스학파가 수학에 남긴 업적은 다음과 같다.

1) 기하학에서 증명을 체계적으로 도입하고 기하학을 과학으로 건설한것
2) 직선도형에 대한 평면기하학을 건설한것
3) 피다고라스정리를 증명한것
4) 닮음도형에 대한 연구를 처음으로 진행한것
5) 몇개의 바른다각형과 바른다면체의 그리기법을 창안한것

제2장. 함 수

제1절. 2차함수

1. 2차함수의 그라프변환

1) $y = ax^2 + n$의 그라프

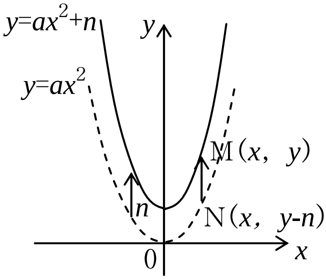


그림 2－1

해보기 함수 $y = 2x^2$과 $y = 2x^2 + 3$에 대하여

1) 독립변수의 같은 값에 대응하는 함수값들사이에는 어떤 관계가 있는가?

2) $y = 2x^2$의 그라프로부터 $y = 2x^2 + 3$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?

$y = ax^2 + n$의 그라프

함수 $y = ax^2$의 그라프를 y축의 정방향으로 n만큼($n>0$이면 우로, $n<0$이면 아래로) 평행이동시키면 $y = ax^2 + n$의 그라프가 얻어진다.

일반적으로 $y = f(x) + n$의 그라프는 $y = f(x)$의 그라프를 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동시켜 얻는다.(그림 2-1)

문 제

1. 함수 $y = 3x^2$의 그라프로부터 $y = 3x^2 - 1$의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하는가?

2. 함수 $y = x^2$의 그라프를 써서 $y = -2x^2 - 3$의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하는가?

3. $y=x^2$ 의 그라프를 그림 2-2와 같이 이동시켰다. ①, ②, ③은 각각 어떤 함수의 그라프와 같은가?

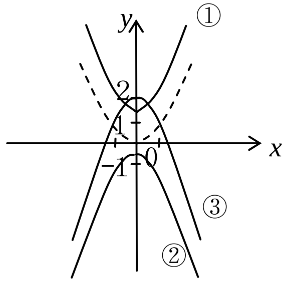


그림 2－2

4. $y=\frac{3}{4}x^2$ 의 그라프로부터 다음 함수들의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하겠는가? 매 정점의 자리표를 구하여라.

1) $y=-\frac{3}{4}x^2-25$　　2) $y=x^2-1.5$

3) $y=-\frac{3}{2}x^2+1\frac{1}{4}$　　4) $y=6x^2-7$

5. $y=ax^2+n$ 의 그라프가 두 점 (0, −5), (−6, 7)을 지난다. a 와 n의 값을 구하여라.

6. 다음 두 함수의 그라프를 한자리표평면에 그리고 그 사귐점의 개수를 말하여라.

1) $y=2x^2$ 과 $y=x+1$　　2) $y=2x^2$ 과 $y=4-2x^2$

2) $y=a(x-m)^2$ 의 그라프

알아보기 두 함수 $y=2x^2$ 과 $y=2(x-2)^2$ 에 대하여

1) 독립변수 x의 값에 대응하는 두 함수값을 각각 표에 써넣어라.

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=2x^2$				2					
$y=2(x-2)^2$				18					

2) 표를 보고 $y=2(x-2)^2$ 의 그라프를 그려라.

3) 두 함수의 그라프에서 y자리표가 같은 점들의 x자리표사이에 어떤 관계가 있는가를 말하여라.

4) $y=2x^2$ 의 그라프로부터 $y=2(x-2)^2$ 의 그라프를 어떻게 얻을수 있는가?

$y=a(x-m)^2$의 그라프

$y=ax^2$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼($m>0$이면 오른쪽으로, $m<0$이면 왼쪽으로) 평행이동시키면 $y=a(x-m)^2$의 그라프가 얻어진다.

일반적으로 함수 $y=f(x-m)$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정의 방향으로 m만큼 평행이동시켜 얻는다. (그림 2-3)

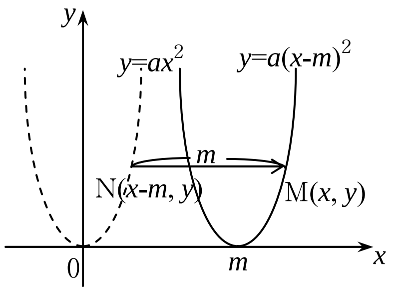


그림 2－3

문 제

1. $y=3x^2$의 그라프로부터 $y=3(x+2)^2$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?
2. $y=4x^2$의 그라프로부터 $y=-4(x-3)^2$의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?
3. 다음 함수의 그라프를 그리지 말고 그의 정점의 자리표를 구하여라.

   1) $y=x^2-2x+1$　　2) $y=\frac{1}{2}(x-7)^2$

   3) $y=-5(x+3)^2$　　4) $y=-\frac{3}{4}x^2+3x-3$
4. 다음 함수의 그라프를 x축의 정방향으로 -2만큼 평행이동시키면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?

   1) $y=7x^2$　　2) $y=-4x^2$

3) $y=a(x-m)^2+n$의 그라프

알아보기 함수 $y=3x^2$의 그라프를 그림 2－4와 같이 평행이동시키면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?

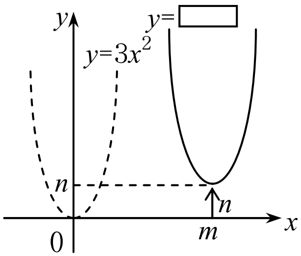


그림 2－4

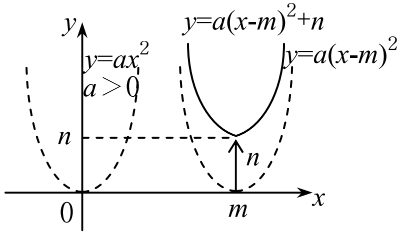


그림 2－5

$y=a(x-m)^2+n$의 그라프

$y=ax^2$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동시킨 다음 련이어 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동시키면 $y=a(x-m)^2+n$의 그라프가 얻어진다.

일반적으로 함수 $y=f(x-m)+n$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정의방향으로 m만큼 평행이동시킨 다음 y축의 정의방향으로 n만큼 평행이동시켜 얻는다. (그림 2-5)

그라프를 이동하는것을 그라프의 **변환**이라고 부른다.

문 제

1. 함수 $y=\frac{3}{4}x^2$의 그라프를 x축의 정방향으로 －2만큼 평행이동시킨 다음 계속하여 y축의 정방향으로 3만큼 평행이동시키면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?
2. $y=3x^2$의 그라프로부터 다음 함수들의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

1） $y=3(x-2)^2+2$　　　　2） $y=3(x+5)^2-1$

3） $y=-3(x+3)^2+7$

3. $y=\frac{1}{2}(x-7)^2+n$ 의 그라프가 점 (5, 6)을 지난다. n의 값을 구하여라.

4. $y=a(x-3)^2+n$ 의 그라프가 점 (3, 5), (1, 17)을 지난다. 이 함수를 구하여라.

5. 어떤 포물선이 그림 2-6과 같이 주어졌다. 이 함수를 구하여라.

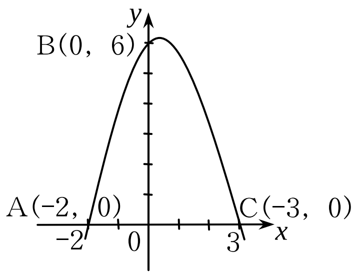


그림 2-6

해보기 2차함수 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 의 그라프는 $y=ax^2$ 의 그라프로부터 얻을수 있다.

그림을 보고 그 방법을 설명하여라.

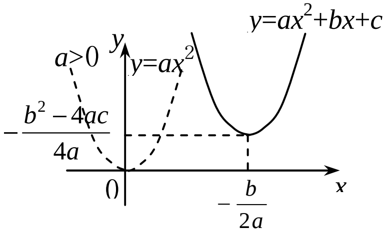


그림 2－7

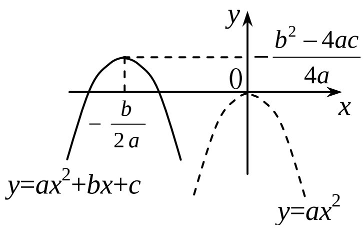


그림 2－8

$b^2-4ac=\mathrm{D}$ 로 표시하면

$$y=ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

그러므로 $y=ax^2$ 의 그라프를 x 축의 정방향으로 $-\frac{b}{2a}$ 만큼 평행이동시킨 다음 련이어 y 축의 정방향으로 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 만큼 평행이동시키

면 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프가 얻어진다. 이로부터 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 $y=ax^2$ 의 그라프와 같은 곡선 즉 포물선이라는것을 알수 있다.

이때 정점의 자리표는 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{D}{4a}\right)$ 이다.

$y=ax^2+bx+c$의 그라프

2차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그라프는 점 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{D}{4a}\right)$ 를 정점으로 가지는 포물선이다.

$a>0$ 이면 우로 벌어지고 $a<0$ 이면 아래로 벌어진다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 $f(0)=c$ 이므로 점 $(0,\ c)$ 에서 y 축과 사귄다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 그리지 말고 그것의 정점을 말하여라. 또 그라프의 가지가 벌어진 방향을 말하여라.

   1) $y=x^2-6x+1$　　2) $y=3x+x^2$

   3) $y=-2x^2+7x$　　4) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$

2. 함수 $y=2x^2+3x-2$ 의 그라프로부터 함수 $y=-2x^2+3x+1$ 의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

2. 2차함수의 최대값과 최소값

알아보기 다음의 그라프를 보고 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 값이 어느 구간에서 증가하고 어느 구간에서 감소하는가 말하여라. 또 함수의 최대값 또는 최소값을 말하여라.

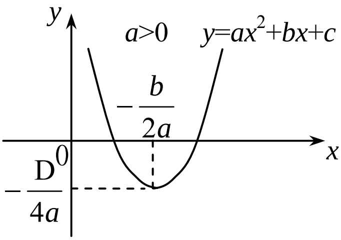


그림 2−9

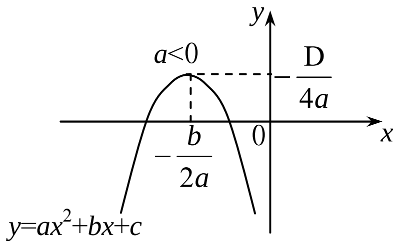


그림 2−10

$a>0$ 일 때

$$f(x)=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{D}}{4a}\geq-\frac{\mathrm{D}}{4a}(\mathrm{D}=b^2-4ac)$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

따라서 $a>0$ 일 때 $f(x)$ 의 값은 늘 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 보다 작지 않으며 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최소값 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 를 가진다.

$a<0$ 일 때

$$f(x)=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{D}}{4a}\leq-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

따라서 $a<0$ 일 때 $f(x)$ 의 값은 늘 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 보다 크지 않으며 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최대값 $-\frac{\mathrm{D}}{4a}$ 를 가진다.

2차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 값은

$a>0$ 일 때 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 에서 감소하고 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 에서 증가한다.

$a<0$ 일 때 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 에서 증가하고 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 에서 감소한다.

함수값이 증가하는 구간, 감소하는 구간을 각각 그 함수의 **증가구간**, **감소구간**이라고 부른다.

례 1. 함수 $f(x)=2x^2-4x-1$ 의 최대값 또는 최소값을 구하여라. 어느 구간에서 감소하고 어느 구간에서 증가하는가? 이 함수의 그라프를 대략 그려라.

(풀이) $a=2>0$ 이므로 이 2차함수의 그라프는 우로 벌어진 포물선이다. 따라서 최소값을 가진다.

$$f(x)=2x^2-4x-1=2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left(x^2-2x+1^2-1^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left[(x-1)^2-\frac{3}{2}\right]=2(x-1)^2-3\geq -3$$

이로부터 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최소값 −3을 가진다. 최대값은 없다.

또 $f(0)=-1$ 이므로 $f(x)$ 의 그라프는 점 (0, −1)에서 y 축과 사귀며 점 (1, −3)을 정점으로 하는 포물선이다.

그라프를 대략 그리면 그림 2-11과 같다.

그라프를 보면 함수는 (−∞, 1)에서 감소하고 (1, +∞)에서 증가한다.

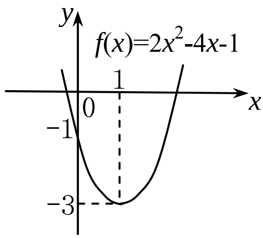


그림 2−11

례 2. 1 000m고지에서 40m/s의 속도로 올려던진 물건이 t초 지났을 때 y m의 높이에 이른다고 하면 y 는 대략 $y=-5t^2+40t+1000$ 과 같이 표시된다. 이 물건이 가장 높이 올라갔을 때는 어느때이고 그때의 높이는 얼마인가?

(풀이) 함수 $y=-5t^2+40t+1000$ 의 최대값을 구하는 문제이다.

$$y=-5t^2+40t+1000=-5(t^2-8t-200)$$

$$=-5(t^2-8t+4^2-4^2-200)=-5[(t-4)^2-216]$$

$$=-5(t-4)^2+1080\leq 1080$$

그러므로 이 함수는 $t=4$ 일 때 최대값 1 080을 가진다.

즉 대략 4초 지났을 때 가장 높이 올라가며 이때 높이는 1 080m이다.

문 제

1. 다음 함수들의 최대값 또는 최소값과 증가구간, 감소구간을 구하고 그라프를 대략 그려라.

1) $f(x)=-x^2-4x+1$ 2) $f(x)=2x^2-x-3$

3) $y=3x^2-10x+100$

2. 대칭축이 $x=2$ 이고 두 점 (1, −1), (−1, 23)을 지나는 포물선은 어떤 함수의 그라프인가? 그 함수를 구하여라.

3. 대칭축이 y 축에 평행이고 세 점 (0, 8), (1, 2), (2, 4)를 지나는 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

4. 다음 그림들과 같은 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

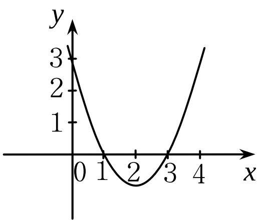


그림 2−12

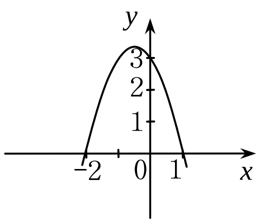


그림 2−13

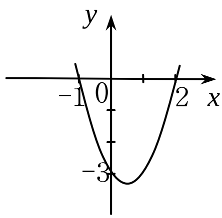


그림 2−14

5. 다음 함수의 증가구간, 감소구간, 최대값 또는 최소값을 구하여라. 그리고 함수의 그라프를 대략 그려라.

1) $y=(x+2)(4-x)$ 2) $y=-x^2+6x-10$

3) $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x-6$ 4) $y=2-6x-3x^2$

6. 함수 $y=3x^2+4ax+b$ 는 x=2일 때 최소값이 7이다. a , b 의 값을 구하여라.

7. 길이가 40cm인 쇠줄로 면적이 가장 큰 직4각형을 만들자면 어떻게 해야 하겠는가? 그 면적은 얼마인가?

8. 어떤 2차함수의 최소값은 −5이고 그라프는 두 점 (−1, 1), (0, 1)을 지난다. 그 함수를 구하여라.

3. 짝함수와 홀함수

찾기 다음 함수들가운데서 조건 $f(-x)=f(x)$ 또는 $f(-x)=-f(x)$ 에 맞는것을 찾아내여라.

1） $f(x)=x^3$　　2） $f(x)=x^2+3x-2$

3） $f(x)=x^5-3x$　　4） $f(x)=x^4-x$

5） $f(x)=2x^6-3x^4+5$　　6） $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

> 뜻구역의 모든 점에서
> 1） 늘 $f(-x)=f(x)$가 성립하면 함수 f를 **짝함수**라고 부른다.
> 2） 늘 $f(-x)=-f(x)$가 성립하면 함수 f를 **홀함수**라고 부른다.

례 1. $y=x^2$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서 $(-x)^2=x^2$이므로 짝함수이다.

$y=x^3$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서 $(-x)^3=-x^3$이므로 홀함수이다.

례 2. $y=x^2-2x+1$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서

$f(x)=x^2-2x+1$，　$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+1=x^2+2x+1$

이므로

$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$$

따라서 주어진 함수는 짝함수도 홀함수도 아니다.

문 제

1. $x\in[-3,\ 5]$에서 주어진 두 함수 $y=3x^4$，$y=x^3$은 다 짝함수도 홀함수도 아니다. 왜 그런가?
뜻구역이 다같이 $[-10,\ 10]$일 때는 어떤가?

2. 다음 함수들가운데서 짝함수인것, 홀함수인것을 가려내여라.

1） $y=|x|+1$　　2） $y=2x^3-x$　　3） $y=x^2+x-5$

4） $y=\dfrac{5x^4}{x^2-3}$　　5） $y=\dfrac{1}{x-3x^3}$　　6） $y=\dfrac{|1-x^2|}{3-|x|}$

7） $y=\sqrt{1+x^2}+5$　　8） $y=x\sqrt{4-x^2}$

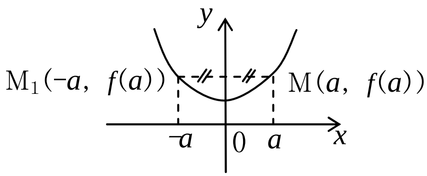
3. 두 짝함수의 합은 짝함수라는것을 증명하여라.
4. 두 홀함수의 합은 홀함수라는것을 증명하여라.

알아보기 $y=f(x)$가 짝함수일 때

1) 점 $(5,\ f(5))$가 f의 그라프에 들면 점 $(-5,\ f(5))$도 이 그라프에 든다. 왜 그런가? 또 그 두 점은 서로 어떤 관계에 있는가?
2) 점 $(a,\ f(a))$와 점 $(-a,\ f(a))$는 어느 축에 관하여 대칭인가?

짝함수의 그라프는

y축에 관하여 대칭이다.

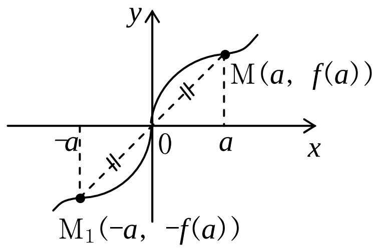


알아보기 $y=f(x)$가 홀함수일 때

1) 점 $(5,\ f(5))$가 f의 그라프에 들면 점 $(-5,\ -f(5))$도 이 그라프에 든다.
왜 그런가? 또 그 두 점은 서로 어떤 관계에 있는가?
2) 점 $(a,\ f(a))$와 점 $(-a,\ -f(a))$는 어느 점에 관하여 대칭인가?

홀함수의 그라프는

원점에 관하여 대칭이다.



문 제

1. 다음 함수가운데서 y축에 관하여 대칭인것과 자리표원점에 관하여 대칭인것을 가려내여라.

1) $y=3-2x^2$ 2) $y=\dfrac{2x}{x^3-x}$

3) $y=\left|x^3\right|+1$ 4) $y=-(x+1)^3$

2. 다음과 같이 말하면 옳은가?

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ 는 홀함수이다.

2) $f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 는 짝함수이다.

3) $f(x)=1$은 홀함수이고 짝함수이다.

4) $f(x)=x^3-x-1$은 짝함수도 아니고 홀함수도 아니다.

련습문제

1. 2차함수 $y=2x^2$ 에서

1) x 가 1에서 3까지 2만큼 변할 때 y 의 값은 얼마만큼 변하는가?

2) x 가 -2에서 0까지, -5에서 3까지 변할 때 변화비를 각각 구하고 비교하여라.

2. $y=x^2$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을수 있는가?

1) $y=x^2+3$ 2) $y=\dfrac{1}{2}(x-0.5)^2$

3) $y=\dfrac{1}{2}(x+2.5)^2+3$ 4) $y=x^2+0.16x-0.009$

5) $y=3x^2+12x+9$ 6) $y=20+8x-2x^2$

3. 다음 함수의 그라프를 대략 그리고 증가구간, 감소구간, 최대값, 최소값을 각각 구하여라.

1) $y=(x+2)^2-3$ 2) $y=-(x-4)^2+1$

3) $y=2x^2-6x+1$ 4) $S=0.5t^2-0.1t+0.01$

4. 2를 최소값으로 가지는 2차함수 $y=x^2+bx+c$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 −2만큼 평행이동시킨 다음 련이어 x축의 정방향으로 3만큼 평행이동하였더니 정점이 점 (1, 0)에 왔다. b, c의 값을 구하여라.

5. 대칭축이 y축에 평행이고 정점이 (2, −3)인 포물선이 점 (0, 1)을 지난다. 이 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

6. 다음 그림들과 같은 포물선을 그라프로 가지는 2차함수를 구하여라.

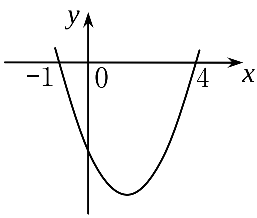


그림 2−15

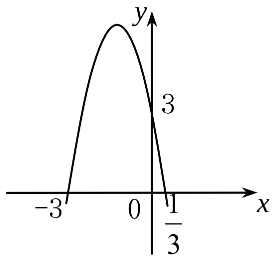


그림 2−16

7. 직각변들의 길이의 합이 a인 직3각형에서 직각변들의 길이를 각각 어떻게 잡아야 그 면적이 최대로 되겠는가? 또 빗변의 길이가 최소로 되겠는가?

8. 다음 함수들가운데서 짝함수와 홀함수를 갈라내여라.

1) $y=3x^4+\dfrac{3}{4}x^3-3$ 2) $y=\dfrac{-1}{5x^3+2x}$

3) $y=x|x|$ 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{7-x^2}}+\sqrt{x^2-5}$

9. 두 짝함수의 적은 짝함수인가?

10. 두 홀함수의 적은 홀함수인가?

11. 다음 함수들이 짝홀성을 가지지 않는다는것을 뜻구역으로 설명하면 다음과 같다.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ 이 짝홀성을 가지지 않는것은 뜻구역이 $(-\infty,\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\ 2)\cup(2,\ +\infty)$로서 ____이 아니기때문이다.

2) $f(x)=x^2+5-\dfrac{1}{x^2-2}+\sqrt{x+5}$ 이 짝홀성을 가지지 않는것은 뜻구역이 ____로서 ____이기때문이다.

제2절. 분수함수와 무리함수

1. 분수함수와 그의 그라프

찾기 다음 식에서 분수식을 가려내여라.

1) $3x^2-7+x$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}x}{1+x}$ 3) $x+\dfrac{2x-1}{x}$

4) $\dfrac{a^2b}{3a-b}$ 5) $\dfrac{x^2-6x+9}{(x-3)(x-2)}$

분수식으로 표시되는 함수를 **분수함수**라고 부른다.

례 1. 다음 분수함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\dfrac{2}{x-1}$ 2) $y=\dfrac{x}{x+3}$

(풀이) 1) $x-1\neq0$ 즉 $x\neq1$

따라서 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ 1)\cup(1,+\infty)$

2) $x+3\neq0$ 즉 $x\neq-3$

따라서 $y=\dfrac{x}{x+3}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ -3)\cup(-3,+\infty)$

문 제

다음 함수들의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=1+\dfrac{1}{x}$ 2) $y=\dfrac{x+1}{x-3}$

3) $y=\dfrac{2x-1}{4-3x}$ 4) $y=\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}$

해보기 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 에서

x	$\cdots$	-3	-2	-1	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$

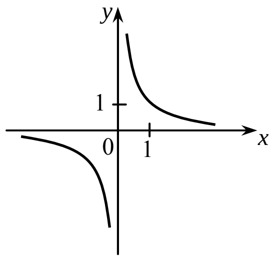
이다.

1) 이 함수의 그라프를 대강 그려보아라.

2) 이 함수의 어느 점에 관하여 대칭인가?

함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프는 원점에 관하여 대칭이다.

이 함수는 뜻구역 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$ 에서 감소한다.



알아보기 함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

1) $y=\frac{2}{x}$　　2) $y=\frac{1}{x-5}-2$

3) $y=\frac{1}{3-x}+2$　　4) $y=\frac{3}{x+a}-5$

$y=\frac{a}{x-m}+n$ (a, m, n은 상수, $a\neq0$) 모양으로 표시되는 함수의 그라프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

례 2. $y=\frac{2x-1}{x+1}$ 의 그라프를 그려라.

(풀이) 분수식을 변형하면

$$y=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}=\frac{2\left(x+1-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=$$

$$=-\frac{3}{x+1}+2$$

$$y=\frac{1}{x} \text{ 을 } \frac{1}{x}\to\frac{3}{x}\to-\frac{3}{x}\to-\frac{3}{x+1}\to-\frac{3}{x+1}+2$$

와 같이 변환하면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 하면 된다.

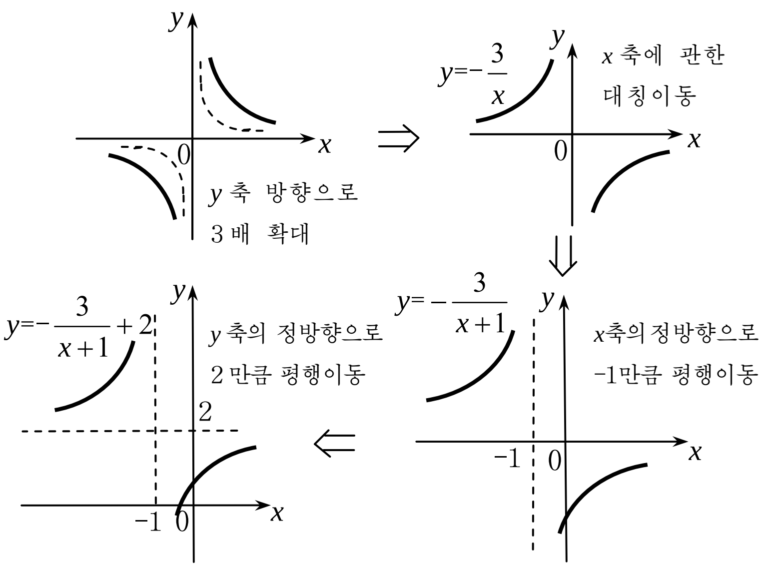


그림 2-17

문 제

1. 함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 얻자면 어떤 그라프변환을 어떤 차례로 하여야 하는가?

1) $y=-\frac{3}{x}$ 2) $y=\frac{2}{x-1}-3$ 3) $y=-\frac{2}{3-x}+1$

2. 그림 2-18은 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프를 변환한것을 보여준다.

변환된 곡선은 어떤 함수의 그라프인가?

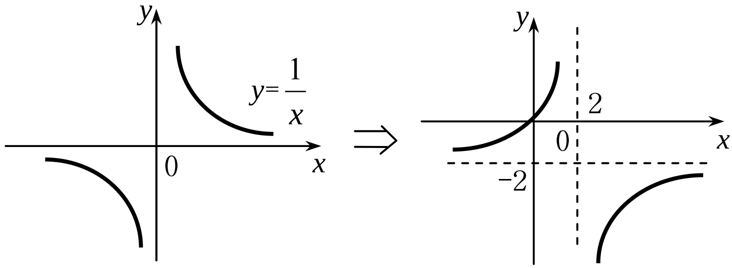


그림 2-18

3. 함수 $y=\frac{1}{|x|+1}$의 그라프를 그려라.

해보기 다음 분수식들을 $\frac{a}{x-m}+n$의 모양으로 변형하여라.

1) $\frac{x}{1+x}$ 2) $\frac{4x-1}{1-x}$ 3) $\frac{2x+16}{3x+3}$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $c\neq 0,\ bc-ad\neq 0)$ 모양의 분수함수의 그라프는 다 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

문 제

1. 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그라프를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\frac{x+1}{x-2}$ 2) $y=\frac{3x-4}{x+2}$

3) $y=\frac{4x}{2x-4}$ 4) $y=\frac{12-4x}{2x-3}$

2. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\frac{1}{|x|}$ 2) $|y|=\frac{1}{x}$

3) $y=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ 4) $y=\frac{3}{1+|x|}$

3. 함수 $y=\dfrac{ax}{x+b}$의 그라프는 직선 $y=2$, $x=1$을 새로운 x축, y축으로 잡을 때 $y=\dfrac{2}{x}$의 그라프와 같아진다. a, b의 값을 구하여라.

2. 무리함수와 그의 그라프

찾기 다음 식들가운데서 무리식을 가려내여라.

$$\sqrt{x},\quad (x-3)^2,\quad a+\sqrt{\frac{b-1}{b+1}},\quad \frac{x-1}{\sqrt{3}(x+1)},\quad (2x-3)^{\frac{1}{2}}$$

무리식으로 표시되는 함수를 **무리함수**라고 부른다.

례 1. 다음 무리함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\sqrt{x+7}$ 　　 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+x$

(풀이) 1) $x+7\geq 0$ 즉 $x\geq -7$

따라서 $y=\sqrt{x+7}$의 뜻구역은 $[-7,\ +\infty)$

2) 분모가 0이 되지 말아야 하므로 $x+3>0$ 즉 $x>-3$

따라서 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+x$의 뜻구역은 $(-3,\ +\infty)$

문 제

1. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\sqrt{2x+1}$ 　　 2) $y=\sqrt{4-5x}$

3) $y=\sqrt{x^2-2x+15}$ 　　 4) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$

2. $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$의 뜻구역은 (　)이다.

1) $x\geq\dfrac{1}{2}$ 　　 2) $x\leq\dfrac{1}{2}$

3) $x=\dfrac{1}{2}$ 　　 4) $x\leq\dfrac{1}{2}$ 또는 $x\geq\dfrac{1}{2}$

해보기 함수 $y=\sqrt{x}$ 에서

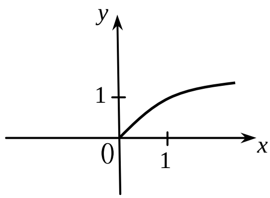
x	0	1	2	3	4	⋯
$y\left(=\sqrt{x}\right)$	0	1	1.4	1.7	2	⋯

이다.

1) 이 함수의 그라프를 대강 그려보아라.

2) 이 함수는 짝함수인가, 홀함수인가?

함수 $y=\sqrt{x}$ 는 뜻구역 $[0, +\infty)$ 에서 증가하는 함수이다.



알아보기 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 얻자면 어떻게 하여야 하는가?

1) $y=\sqrt{x+1}$

2) $y=-\sqrt{x}+3$

3) $y=3-2\sqrt{x}$

4) $y=2\sqrt{x-1}+3$

$y=a\sqrt{x-m}+n\left(a\neq 0\right)$ 모양의 무리함수의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

례 2. $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 어떻게 변환하면 $y=-\sqrt{2-4x}+3$ 의 그라프를 얻겠는가?

(풀이) $y=-\sqrt{2-4x}+3=-\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3=-2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$

$y=\sqrt{x}$ 을

$\sqrt{x}\to 2\sqrt{x}\to -2\sqrt{x}\to -2\sqrt{-x}\to -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\to$

$\to -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$

과 같이 변환하면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 하면 된다.

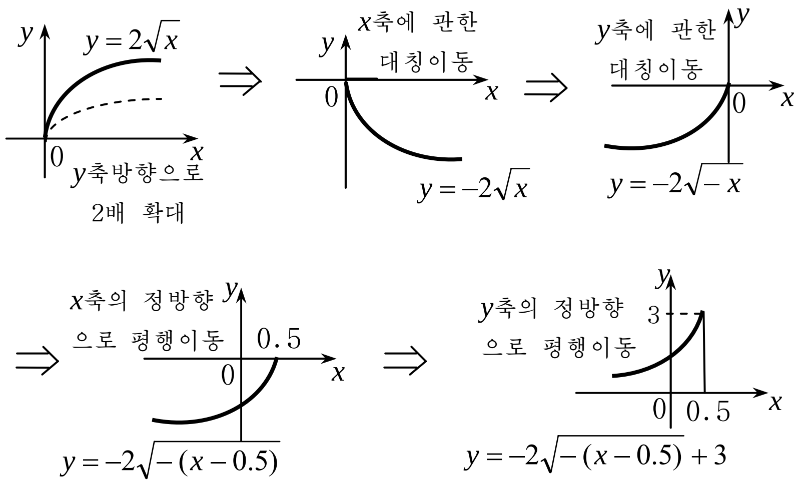


그림 2-19

문 제

1. $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 어떻게 변환하면 다음 함수의 그라프를 얻겠는가?

1) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$　　2) $y=-\sqrt{-x}$

3) $y=\sqrt{1-x}-1.5$　　4) $y=-\sqrt{0.5-x}+2$

2. 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려보아라.

1) $y=\sqrt{2x-3}$　　2) $y=-(4x-3)^{\frac{1}{2}}$　　3) $y=-2\sqrt{3-x}+1$

3. 다음 그림과 같이 변환한 곡선은 어떤 함수의 그라프인가?

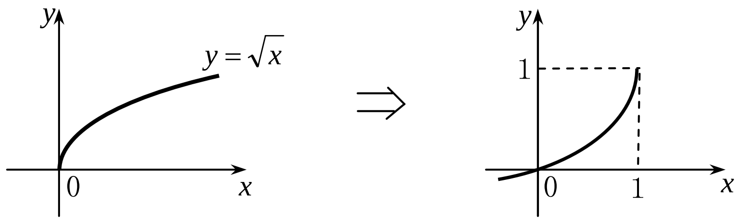


그림 2-20

련습문제

1. 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려라.

1) $y=3-\dfrac{1}{x-2}$　　2) $y=\dfrac{x-1}{2-x}$

3) $y=\dfrac{5x+3}{3x+1}$　　4) $y=\dfrac{3}{x}+3x-1$

2. 함수 $y=\dfrac{3}{x-2}+4$의 그라프를 y축에 평행되게 얼마만큼 이동시켜야 A(5, 1)이 이 곡선의 점으로 되겠는가?

3. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($x\neq-\dfrac{d}{c}$, $bc-ad\neq0$)의 그라프를 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그라프로부터 얻을수 있다는것을 밝혀라.

4. 무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려라.

1) $y=-\sqrt{x+2}$　　2) $y=1-\sqrt{x-2}$

3) $y=3+\sqrt{x+1}$　　4) $y=\sqrt{6-9x}-4$

5. 그림 2-21을 보고 안같기식 $\dfrac{5-x}{x-1}<x+1$의 풀이모임을 구하여라.

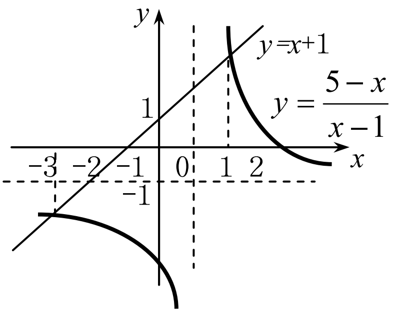


그림 2-21

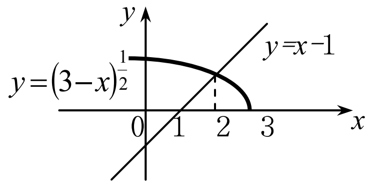


그림 2-22

6. 그림 2-22를 보고 안같기식 $\sqrt{3-x} \le x-1$의 풀이모임을 구하여라.

7. 함수 $y=\frac{|x-1|}{x-1}$의 그라프를 그려라.

8. 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그라프를 그려라.

제3절. 제곱과 제곱함수

1. 지수가 옹근수인 제곱

알아보기 $a \neq 0$, m, $n \in \mathrm{N}$일 때

지수법칙 $a^m \div a^n = a^{m-n}$은 $m>n$일 때 써왔다.

이것을 $m=n$일 때도 그대로 쓰기로 한다면

$$a^5 \div a^5 = a^{5-5} = a^0$$

1) $2^5 \div 2^5$을 계산하면 그 값이 얼마인가?

2) $m=n$일 때도 지수법칙을 그대로 쓰게 하자면 a^0의 값을 얼마로 정해주면 되겠는가?

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

례 1. $\dfrac{a^3}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^0} \cdot \dfrac{b^0}{a^3} = \dfrac{a^3}{1} \cdot \dfrac{1}{a^3} = 1$

해보기 $a \neq 0$, m, $n \in \mathrm{N}$일 때 지수법칙 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 을 $m<n$일 때에도 그대로 쓰기로 한다면

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

1) $2^3 \div 2^5$ 을 계산하면 그 값이 얼마인가?

2) a^{-2} 의 값을 어떻게 정해주면 좋겠는가?

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0, \ n \in \mathrm{N})$$

례 2. $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

$$2x(3a+b)^{-2} = \frac{2x}{(3a+b)^2}$$

문 제

1. 다음 값을 계산하여라.

1) 0.0023^0 2) $(-1.087)^0$

3) $(-\pi)^0$ 4) $-(-7)^0 + \left[\left(-3.7 + \dfrac{3^2}{5}\right)\right]^0$

2. 다음 식을 분수모양으로 표시하여라.

1) 5^{-2}　　2) $(-9)^{-1}$　　3) $(3xy)^{-3}$　　4) $(x+y)^{-2}$

3. 다음 식을 제곱으로 표시하여라.

1) $\frac{1}{8}$　　2) 0.000 001　　3) $\frac{1}{125}$

4) $\frac{1}{16a^4}$　　5) $\frac{1}{27(m+n)^3}$

4. 다음 수들의 크기를 비교하여라.

1) 3^{-4}과 2^{-4}　2) 0.01^{-3}과 0.001^{-3}　3) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$ 과 $\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}$

5. a, $b\neq 0$, $m\in \mathrm{N}$일 때 다음 같기식이 성립한다는것을 밝혀보아라.

1) $a^m a^0 = a^{m+0}$　　2) $(a^m)^0 = a^{m\cdot 0}$

3) $(ab)^0 = a^0 b^0$　　4) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}$

6. 다음 같기식이 성립한다는것을 따져보아라.(a, $b\neq 0$, m, $n\in \mathrm{N}$)

1) $a^{-m}\cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)}$

$$a^{-m}a^{-n} = \frac{1}{a^m}\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)}$$

2) $a^m \div a^{-n} = a^{m-(-n)}$　　3) $(a^{-m})^n = a^{-mn}$

4) $(ab)^{-n} = a^{-n}b^{-n}$　　5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

2. n차뿌리

1) $\frac{1}{n}$ 제곱

해보기 바른6면체의 한 모서리의 길이가 a일 때 그 체적은 a^3이다.

1) 바른6면체의 체적이 8이라고 하면 모서리의 길이는 얼마이겠는가?

2) $a^3=8$에 맞는 a의 값을 8^m으로 표시하면 m을 어떤 수로 표시하면 좋겠는가?

3) 바른6면체의 체적이 V일 때 모서리의 길이를 제곱모양으로 표시하여보아라.

> $a \geq 0$이고 $n \geq 2(n \in \mathrm{N})$일 때 n제곱이 a인 부 아닌 수를 $a^{\frac{1}{n}}$로 표시하고 a의 $\frac{1}{n}$ 제곱이라고 부른다.
>
> $$(a^{\frac{1}{n}})^n = a$$

례 1. $27=3^3$이므로 $27^{\frac{1}{3}}=3$, $100000=10^5$이므로 $100000^{\frac{1}{5}}=10$

$16=2^4$이므로 $16^{\frac{1}{4}}=2$

$a^{\frac{1}{n}}$을 $\sqrt[n]{a}$와 같이 쓰고 《**n루트 a**》라고 읽는다.

(여기서 $n=2$일 때는 보통 n을 쓰지 않는다.)

례 2. $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$, $\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{9}{7}}$

문 제

1. 다음의 갈기식들을 $\frac{1}{n}$제곱이 든 식으로 고쳐보아라.

1) $1^3=1$, $2^3=8$, $5^3=125$

2) $5^2=25$, $3^4=81$, $0.1^5=0.00001$

2. 다음의 갈기식들을 n제곱이 든 식으로 고쳐보아라.

1) $4^{\frac{1}{2}}=2$, $729^{\frac{1}{6}}=3$, $8000000^{\frac{1}{3}}=200$

2) $0.36^{\frac{1}{2}}=0.6$, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$, $0.000064^{\frac{1}{6}}=0.2$

2) *n*차뿌리

해보기 1. 다음 방정식의 풀이를 말해보아라.

1) $x^2=\frac{9}{25}$ 2) $x^3=-27$

2. 2차뿌리를 정의하여라.

> 방정식 $x^n=a(n\in\mathrm{N})$의 풀이를 a의 ***n*차뿌리**라고 부른다.

례 3. $x^3=8$의 풀이 즉 8의 3차뿌리는 2

$x^4=16$의 풀이 즉 16의 4차뿌리는 2, -2

문 제

1. 다음 말이 옳은가?

1) 2와 -2는 64의 6차뿌리이다.

2) -5는 -125의 3차뿌리이다.

3) 0.4와 -0.4는 0.025 6의 4차뿌리이다.

4) 0은 0의 $n(n\in\mathrm{N})$차뿌리이다.

2. 다음 값을 구하여라.

1) 64의 3차뿌리 2) -27의 3차뿌리

3) 0.000 1의 4차뿌리 4) 81의 4차뿌리

알아보기 1) 다음것들의 n차뿌리는 몇개인가?

(1) 9의 2차뿌리 (2) 16의 4차뿌리

(3) 64의 6차뿌리

2) $a>0$일 때 a의 짝수차뿌리는 몇개인가?

3) 0의 짝수차뿌리는 얼마인가?

4) $a<0$일 때 a의 짝수차뿌리는 얼마인가?

n이 짝수일 때

$a>0$이면 a의 n차뿌리는 두개 즉 $\pm a^{\frac{1}{n}}\left(\pm\sqrt[n]{a}\right)$

$a=0$이면 a의 n차뿌리는 0뿐이다.

$a<0$이면 a의 n차뿌리는 없다.

례 4. $x^4=256$의 4차뿌리는 $x=\pm 256^{\frac{1}{4}}=\pm 4$

또는 $x=\pm\sqrt[4]{256}=\pm\sqrt[4]{4^4}=\pm 4$

해보기 1. 다음것들의 n차뿌리는 얼마이며 몇개인가?

1) 8의 3차뿌리 2) 32의 5차뿌리

3) −32의 5차뿌리 4) 0의 홀수차뿌리

2. a의 홀수차뿌리는 몇개인가?

n이 홀수일 때

$a>0$이면 a의 n차뿌리는 $a^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt[n]{a}\right)$이다.

$a=0$이면 a의 n차뿌리는 0뿐이다.

$a<0$이면 a의 n차뿌리는 $-|a|^{\frac{1}{n}}$이다.

앞에서 뿌리기호 $\sqrt[n]{\ }$ 은 $\frac{1}{n}$제곱을 표시하는데 썼다.

n이 홀수일 때 뿌리기호는 부수의 n차뿌리를 표시하는데도 쓴다.

례 5. −5의 3차뿌리를 $\sqrt[3]{-5}$ 와 같이 쓴다.

즉 $\sqrt[3]{-5}=-|-5|^{\frac{1}{3}}=-5^{\frac{1}{3}}$

문 제

1. 다음과 같이 말하면 옳은가?

1) $\sqrt[6]{64}$ 는 정수이다.

2) $\sqrt[3]{-125}$ 는 정수이다.

3) −2의 3차뿌리는 없다.

4) 64의 3차뿌리는 두개 즉 4와 −4이다.

5) 9의 4차뿌리는 정수이다.

6) $\sqrt[11]{-121}$ 은 부수이다.

2. 다음 방정식의 풀이를 제곱과 뿌리기호를 써서 각각 표시하여라.

1) $x^6=1.3$, $x^{10}=\frac{3}{4}$, $x^4=0$

2) $x^3=\frac{2}{3}$, $x^5=0$, $x^7=-0.6$

3. 다음 뿌리가 있으면 제곱으로 표시하여라.

1) $\frac{1}{2}$의 4차뿌리, 0의 6차뿌리, −0.12의 8차뿌리

2) 13의 5차뿌리, 0의 7차뿌리, $-1\frac{2}{7}$의 9차뿌리

4. 다음것을 제곱으로 표시하여라.

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{\frac{3}{17}}$, $\sqrt[4]{1\frac{5}{9}}$ 2) $\sqrt[3]{-6}$, $\sqrt[5]{-1.9}$, $\sqrt[9]{0.6}$

5. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-1.3=0$ 2) $3x^2-11=0$ 3) $3x^{14}-18=0$

4) $(x-5)^5=-2$ 5) $(x+1)^7=3$

6. 다음 갈기식이 a의 어떤 값들에 대해서 성립하는가?

1) $\sqrt[3]{a^3}=a$ 2) $\sqrt[4]{a^4}=a$

3) $\sqrt[4]{a^4}=-a$ 4) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$

3) $\frac{1}{n}$ 제곱의 성질

해보기 1. $A\geq 0$ 일 때 $A^{\frac{1}{n}}=B$ 가 옳다는것을 증명하자면 어떤 사실들을 밝혀야 하는가?

2. 다음 값들을 비교하여라.

1) $(8\cdot 27)^{\frac{1}{3}}$ 과 $8^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}$ 2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ 과 $\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}$

3) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ 과 $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}$ 4) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ 과 $64^{\frac{1}{2\cdot 3}}$

$\frac{1}{n}$ 제곱의 성질

1) $(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\ (a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\in \mathrm{N})$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\ (a\geq 0,\ b>0,\ n\in \mathrm{N})$

3) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}\ (a\geq 0,\ \ m,\ \ n\in \mathrm{N})$

4) $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{mk}\right)^{\frac{1}{nk}}\ (a\geq 0,\ \ m,\ \ n\in \mathrm{N},\ \ k\in \mathrm{N})$

5) $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}\ (a\geq 0,\ m,\ \ n\in \mathrm{N})$

(증명) 1)의 증명

$$\left(a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n=ab$$

한편 $a\geq 0$, $b\geq 0$이므로 $a^{\frac{1}{n}}\geq 0$, $b^{\frac{1}{n}}\geq 0$

따라서 $a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\geq 0$

이리하여 $(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$

3)의 증명

$a\geq 0$ 이므로 성질 1)에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\underbrace{a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\cdots\cdots a^{\frac{1}{n}}}_{m\text{개}}=(\underbrace{a\cdot a\cdot\ \cdots\ \cdot a}_{m\text{개}})^{\frac{1}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

마찬가지방법으로 다른것들도 증명할수 있다.

3개이상의 부 아닌 수 a, b, …, ℓ에 대하여서도 다음 식이 성립한다.

$$(ab\cdots\ell)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\cdots\ell^{\frac{1}{n}}\quad \text{특히}\quad (a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

례 6. 1) $(81\cdot 256)^{\frac{1}{4}}=81^{\frac{1}{4}}\cdot 256^{\frac{1}{4}}=3\cdot 4=12$

2) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{4}$

례 7. 1) $\left(27^4\right)^{\frac{1}{3}}=\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4=3^4=81$

2) $\left(3^6\right)^{\frac{1}{12}}=\left(3^6\right)^{\frac{1}{6\cdot 2}}=3^{\frac{1}{2}}$

3) $\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=32^{\frac{1}{15}}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{15}}=2^{\frac{1}{3}}$

전자수산기로 계산하면

32 [x^y] [( ] 1 [/] 15 [ )] [=] 1.2599

따라서 $\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 1.2599$

문 제

1. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\left(0.4^6\right)^{\frac{1}{12}}$ 2) $\left(7^4\right)^{\frac{1}{16}}$ 3) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{8}}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(16\cdot 81)^{\frac{1}{4}}$ 2) $\left(\frac{1}{81}\cdot 10\,000\right)^{\frac{1}{4}}$ 3) $(8\cdot 125\cdot 64)^{\frac{1}{3}}$

4) $\dfrac{54^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ 5) $\left(10-19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(10+19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$

3. $\frac{1}{n}$ 제곱의 성질을 뿌리기호를 써서 표시하여라.

4. 다음 같기식이 옳은가?

1) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3=\sqrt[4]{27}$ 2) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^4=\sqrt[3]{16}$

3) $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^7=\sqrt[5]{-128}$ 4) $\left(\sqrt[6]{3}\right)^7=\sqrt[6]{2187}$

5. 밀수의 인수가운데서 $\frac{1}{n}$제곱 또는 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는것은 다 내보내여라.

1） $\left(81\cdot a^4\right)^{\frac{1}{4}}$　　　2） $\sqrt[5]{-3a^7b^{10}}$

3） $\sqrt[6]{64a^7x^{12}y^8}$　　　4） $\left(\frac{x^6y}{a^3b^6}\right)^{\frac{1}{3}}$

6. 다음 식에서 인수를 $\frac{1}{n}$제곱 또는 뿌리기호안에 넣어라.

1） $5\cdot 7^{\frac{1}{2}}$　　　2） $2\sqrt[4]{3}$　　　3） $xy\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$　　　4） $(a-b)\sqrt[3]{\frac{2}{a^2-b^2}}$

7. 다음 두 식의 값을 비교하여라.

1） $\sqrt[3]{3}$ 과 $\sqrt{2}$　　　2） $\sqrt[6]{5}$ 과 $\sqrt[3]{3}$

3） $2^{\frac{1}{3}}$ 과 $45^{\frac{1}{12}}$　　　4） $7^{\frac{1}{3}}$ 과 $\left(3\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

3. 지수가 분수인 제곱

해보기 1. 다음 식들의 값을 비교하여라.

$\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}$ 과 $2^{\frac{4}{2}}=2^2$, $\left(81^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}$ 과 $81^{-\frac{2}{4}}=81^{-\frac{1}{2}}$,

$\left(81^2\right)^{\frac{1}{4}}$ 과 $81^{\frac{2}{4}}=81^{\frac{1}{2}}$

2. $a>0$일 때 $\left(a^3\right)^{\frac{1}{4}}$ 을 $a^{\frac{3}{4}}$ 으로 쓰기로 해도 되겠는가?

$a>0$, $m\in Z$, $n\in N$일 때 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ 을 $a^{\frac{m}{n}}$ 으로 표시하고 a의 $\frac{m}{n}$ 제곱이라고 부른다.

$$\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\right)$$

례 1. $\left(0.3^5\right)^{\frac{1}{4}}=0.3^{\frac{5}{4}}$ $\qquad \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^5=\left(5^5\right)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{5}{4}}$ $\qquad \left(7^{-5}\right)^{\frac{1}{6}}=7^{-\frac{5}{6}}$

유리수지수가 부수일 때도 부의 옹근수지수인 경우와 같은 뜻을 가진다.

$a>0$, m, $n\in N$일 때 $a^{-\frac{m}{n}}=\left(a^{-m}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

즉 $$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

유리수지수는 또한 약분할수 있다.

$a>0$일 때

$$a^{\frac{3}{12}}=\left(a^3\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\left(a^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{4}} \quad 즉 \quad a^{\frac{3}{12}}=a^{\frac{1}{4}}$$

례 2. 1) $5^{-1.6}$을 $\frac{1}{n}$제곱모양으로 변형하여라.

2) $\frac{1}{\left(5^{0.3}\right)^{\frac{1}{2}}}$을 분수제곱모양으로 변형하여라.

(풀이) 1) $5^{-1.6}=5^{-\frac{16}{10}}=5^{-\frac{8}{5}}=\left(5^{-8}\right)^{\frac{1}{5}}$

2) $\dfrac{1}{\left(5^{0.3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{5^{\frac{0.3}{2}}}=\dfrac{1}{5^{\frac{3}{20}}}=5^{-\frac{3}{20}}$

문 제

1. 다음 식에서 유리수제곱을 $\dfrac{1}{n}$제곱모양으로 변형하여라.

1) $6^{\frac{2}{3}}$ 2) $8^{\frac{8}{5}}$ 3) $0.9^{0.2}$ 4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1.4}$

2. 다음 식을 유리수제곱모양으로 변형하여라.

1) $\left(12.4^{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 2) $\left(\dfrac{1}{17}\right)^{\frac{1}{5}}$ 3) $\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$

4) $\dfrac{1}{\left(12^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}}$ 5) $\left(8a^{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ 6) $\dfrac{1}{3b\left(a^{2}\right)^{\frac{1}{7}}}$

3. 다음 제곱의 값을 구하여라.

1) $1000^{\frac{1}{3}}$ 2) $0.01^{-\frac{1}{2}}$ 3) $1^{-0.72}$ 4) $10^{\frac{0}{7}}$

5) $27^{\frac{1}{3}}$ 6) $16^{-\frac{1}{4}}$ 7) $81^{\frac{3}{4}}$ 8) 0.01^{-25}

4. 다음 식의 뜻구역을 구하여라.

1) $\sqrt[5]{\left(3x-\dfrac{3}{4}\right)^{3}}$ 2) $(a-5)^{-\frac{2}{3}}$

3) $\sqrt[7]{(x-0.75)^{5}}$ 4) $\sqrt[12]{(4-x)^{7}}$

유리수지수의 경우에도 지수법칙이 그대로 성립한다.

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (a>0, \quad r, s \in \mathrm{Q})$

2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (a>0, \quad r, s \in \mathrm{Q})$

3) $\left(a^r\right)^s = a^{rs} \quad (a>0, \quad r, s \in \mathrm{Q})$

4) $(a \cdot b)^r = a^r b^r \quad (a>0, \quad b>0, \quad r \in \mathrm{Q})$

5) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^r = \dfrac{b^r}{a^r} \quad (a>0, \quad b>0, \quad r \in \mathrm{Q})$

(증명) 1)을 증명하자.

r, s를 분모가 같은 분수로 고친것이

$$r = \frac{m}{n},\ s = \frac{k}{n}\left(k,\ m \in \mathrm{Z},\ n \in \mathrm{N}\right)$$

이라고 하자.

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} (a^k)^{\frac{1}{n}} = \left(a^m a^k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{m+k}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{r+s}$$

마찬가지방법으로 다른것들도 증명할수 있다.

례 3. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3+8}{12}} = 3^{\frac{11}{12}}$

$0.2^{-\frac{1}{2}} \div 0.2^{\frac{1}{3}} = 0.2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 0.2^{\frac{-3-2}{6}} = 0.2^{-\frac{5}{6}}$

$$\left(16^{-0.75}\right)^{-\frac{8}{3}}=16^{-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}=16^{2}=256$$

$$(81\cdot 16)^{-\frac{1}{4}}=81^{-\frac{1}{4}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}}=(3^{4})^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(2^{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$=3^{-1}\cdot 2^{-1}=(3\cdot 2)^{-1}=6^{-1}=\frac{1}{6}$$

문 제

1. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sqrt[3]{a^{4}}\sqrt[5]{a}$ 2) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ 3) $\sqrt[4]{\left(b^{-3}\right)^{2}}$

2. 다음 식을 지수가 분수인 제곱으로 표시하여라.

1) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}$ 2) $\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}}$ 3) $\sqrt{\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{5}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}}}$

4) $\sqrt{b^{2}\sqrt[4]{b^{-3}}}$ $(b>0)$ 5) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ $(a>0)$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$ 2) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}}$

3) $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^{3}c^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}b^{4}c^{-1}}}\cdot a^{12}\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}$

4. 한 지방산업공장에서는 기술혁신운동을 힘있게 벌려 생산량을 5년동안에 해마다 평균 37%씩 늘였다.

1) 3년만에는 생산량이 약 몇배로 늘어났겠는가?

이전 생산량을 1로 보면 생산량이

1년만에는 $1+\frac{37}{100}$

2년만에는 $\left(1+\frac{37}{100}\right)^2$

3년만에는 $\left(1+\frac{37}{100}\right)^3 \approx 2.571$ 답. 약 2.6배

2) 4년 3개월만에는 생산량이 약 몇배로 늘어났겠는가?

5. 인민생활을 높일데 대하여 주신 경애하는 수령 **김일성**대원수님의 유훈과 위대한 령도자 **김정일**원수님의 말씀을 높이 받들고 어느 한 닭공장 로동자들은 닭알생산을 해마다 평균 30%씩 늘였다. 3년 6개월만에는 이전에 비하여 닭알생산량이 몇배로 늘어났겠는가?

4. α제곱함수

알아보기 1. 매개 수 x에 제곱 $x^{\frac{1}{2}}$을 꼭 하나씩 대응시킬수 있는가?

2. 매개 수 x에 제곱 $x^{\frac{2}{3}}$을 꼭 하나씩 대응시킬수 있는가?

3. 매개 수 x에 제곱 $x^{\alpha}(\alpha \in \mathrm{Q})$를 꼭 하나씩 대응시킬 수 있는가?

> x에 그의 α제곱($\alpha \in \mathrm{Q}$)을 대응시키는 함수 $f: x \to x^{\alpha}$ 또는 $y = x^{\alpha}$을 **α제곱함수**라고 부른다.

제곱함수에서는 지수가 어떤 수인가에 따라 그의 뜻구역이 달라진다.

문 제

1. 다음 제곱함수들의 뜻구역을 구하여라.

1) $y = x^3$　　2) $y = x^{-4}$　　3) $y = x^{\frac{1}{3}}$

4) $y = x^{\frac{1}{5}}$　　　　5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$

2. 함수 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 의 그라프는 그림 2-23과 같다. 왜 그런가?

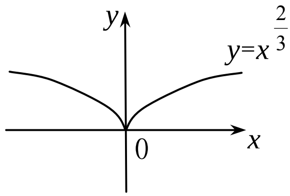


그림 2-23

3. 다음 제곱함수의 그라프를 대강 그려보아라.

1) $y = x^3$　　　　2) $y= x^4$

련습문제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left[7-3\left(\dfrac{5}{27}\right)^0\right]^{-3}$　　　　2) $\left[\dfrac{2^{-4}\cdot 23^0}{3^{-2}}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-1}$

3) $\left[\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$

2. 다음 식을 지수에 부의 옹근수제곱이 없게 변형하여라.

1) $-3ab^{-4}c^4 3a^{-2}bc^{-4}$　　　　2) $\dfrac{2x^{-3}y^{-1}z^{-2}}{3x^{-5}y^2z^{-3}}$

3) $\dfrac{2^{-5}c^{-3}a^8b^2(a+b)^{-2}}{64^{-1}a^{12}b^{-13}c^7(a^2-b^2)^{-1}}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{12^{\frac{1}{6}}a^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}4^{-\frac{5}{6}}a^{-0.1}}$　　　　2) $\dfrac{14^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{9}}}{2^{1.75}\cdot 7^{-0.25}b^{-\frac{4}{9}}}$

3) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}{b^{\frac{6}{15}}}$　　4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{[a(a-b)]^2}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{\sqrt[3]{a-b}}$

4. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(-3x)^3=81$　　2) $(x-5)^5+2=0$

3) $(x-2)^6-7=0$　　4) $3+2\sqrt[3]{x}=0$

5. 밑수의 인수가운데서 제곱 또는 뿌리기호밖에 내보낼수 있는것은 다 내보내여라.

1) $(-135)^{\frac{1}{3}}$　　2) $\sqrt[4]{1944}$　　3) $\sqrt{50a^2}$

4) $(162a^4)^{\frac{1}{4}}$　　5) $\sqrt[5]{96x^{12}y^7}$　　6) $\sqrt[3]{\dfrac{-x^7y^4}{a^4b^4}}$

7) $\dfrac{ab}{uv}\sqrt[3]{\dfrac{108u^6v^5}{375a^4b^3}}$

6. 뿌리기호밖에 있는 인수를 안에 넣어라.

1) $3\sqrt{5}$　　2) $-2\sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$　　3) $ab\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

4) $-3b\sqrt[4]{5}$　　5) $(a-b)\sqrt{\dfrac{2a}{a^2-b^2}}$　　6) $(a+b)\sqrt[4]{\dfrac{6}{a^2-b^2}}$

7. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{(a+b)^2}{c-d}\sqrt[3]{\dfrac{3(c^3-3c^2d+3cd^2-d^3)}{ab(a+b)^3}}$

2) $\dfrac{3a-1}{2-b}\sqrt[12]{\dfrac{(2a+1)^{11}(a^2+2ab+b^2)}{(3a-1)^{24}(a^2-b^2)^2}}$

3) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-2}+b^{-2}\right)\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)$

4) $\left[\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)^{-1}\right]\left[\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}-a\right]\div\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

8. x=12.25일 때 다음 식의 값을 구하여라.

$$\left(\sqrt[4]{x}-6\right)^2-12\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-1\right)$$

9. 다음 식의 값은 자연수 n에 관계없이 일정한 값을 가진다는것을 증명하여라.

1) $\dfrac{\sqrt{9^n-9^{n-1}}}{\sqrt[3]{27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2}}}$ 2) $\dfrac{\sqrt[3]{8^{n-2}+7\cdot 8^{n-3}}}{\sqrt[4]{16^{n-1}-16^{n-2}}}$

10. $n\in \mathrm{N}$이고 a, b가 서로 다른 정의 옹근수일 때 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ 과 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 가운데서 어느것이 큰가를 따져보아라.

11. $\sqrt[3]{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ 의 값은 ( )이다.

1) 정수 2) 부수 3) 0 4) 확정할수 없다.

12. 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1+2^{-\frac{1}{32}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{16}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{8}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{4}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{2}})$$

13. 함수 $y=x^2$, $y=x^{-2}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\dfrac{x}{3}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수를 모두 써라.

1) $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수는 ________이다.

2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ 를 만족시키는 함수는________ 이다.

3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시키는 함수는 ________이다.

4) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$를 만족시키는 함수는 ________이다.

14. $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2}+2\sqrt[3]{9}}$ 에 가장 가까운 옹근수는 ( )이다.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

15. $a<b<0$이면 아래의 결론이 옳은것은 어느것인가?

1) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$　　2) $\frac{1}{2^a}<\frac{1}{2^b}$

3) $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$　　4) 앞의것들은 옳지 않다.

16. $x=\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)$일 때 $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$을 계산하여라.

복습문제

1. 다음 2차함수의 증가구간과 감소구간, 최대값 또는 최소값을 구하여라. 그리고 이 함수의 그라프를 대략 그려라.

1) $y=x^2-4x-5$　2) $y=-2x^2+3x-2$　3) $y=9x^2-6x+1$

2. a를 변화시킬 때 함수 $y=x^2+ax$의 그라프의 정점은 어떤 선을 따라 움직이겠는가?

3. $y=a(x+1)^2+bx$의 그라프가 점 (1, 14)와 (-2, -1)을 지난다.

a, b의 값을 구하여라. 이 함수의 최소값은 얼마인가?

4. 다음 함수가운데서 짝함수, 홀함수를 각각 가려내여라.

1) $y=\frac{2}{5}x^4-0.7x^2-5$　　2) $y=\frac{9^{-0.4}}{x-4x^3}$

3) $y=\frac{1}{2}x^3-5$　　4) $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{3-x^2}}$

5. $f_1(x)$, $f_2(x)$가 짝함수이고 $g_1(x)$, $g_2(x)$가 홀함수일 때 다음 함수의 짝홀성을 구하여라.

1) $f_1(x)-f_2(x)$　　2) $f_1(x)\div f_2(x)$

3) $g_1(x)\div g_2(x)$　　4) $g_1(x)-g_2(x)$

5) $f_1(x)\cdot g_1(x)$　　6) $f_1(x)\div g_1(x)$

6. $a>0,\ \ n>1\ (n\in \mathrm{N})$ 일 때

$\sqrt[n]{a^{n+1}},\ \sqrt[n+1]{a^{n}},\ \sqrt[n-1]{a^{n}},\ \sqrt[n]{a^{n-1}},\ \sqrt[n+1]{a^{n-1}},\ \sqrt[n-1]{a^{n+1}}$ 가운데서 어느것이 제일 크고 어느것이 제일 작은가?

7. 다음 식을 제곱으로 고쳐서 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a^4}}$ 2) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}{\sqrt[30]{b^{12}}}$

8. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(a-b)-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{16}{1+a}$

3) $\left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}-(xy)^{\frac{1}{2}}\right]\div(x-y)+\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$

9. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

10. $x-\dfrac{1}{x}=3$ 일 때 $\dfrac{x^{10}+x^8+x^2+1}{x^{10}+x^6+x^4+1}$ 의 값을 구하여라.

제3장. 방정식과 안갈기식

제1절. 분수방정식과 분수안갈기식

1. 분수방정식

찾기 다음 방정식들가운데서 분수식이 들어있는 방정식을 가려내여라.

1) $3x+8=\dfrac{6}{5x-1}$　　　2) $x^2+\dfrac{1}{5}x=36$

3) $\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}$

> 분수식이 들어있는 방정식을 **분수방정식**이라고 부른다.

알아보기 다음과 같이 얻어진 풀이가 주어진 방정식의 풀이로 되는가? 왜 그런가?

$$\frac{x\left(x^2-2x+1\right)}{x-1}=0 \Rightarrow \frac{x(x-1)^2}{x-1}=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$풀이모임 {0, 1}

> 분수방정식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=0$ 모양으로 고친 다음 약분하지 않고 푼다. 이때
>
> $$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{B}=0\\ \mathrm{A}\neq 0\end{cases}$$

례 1. 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{x-5}{x^2-1}+3=\frac{2}{1-x}$$

(풀이) 오른변을 왼변으로 옮기고 통분하면

$$\frac{x-5+3(x^2-1)+2(x+1)}{x^2-1}=0$$

분자를 정돈하고 인수분해하면

$$\frac{3(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$$

이로부터

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+2)=0 & ① \\ x^2-1\neq 0 & ② \end{cases}$$

①의 풀이 1과 -2가운데서 1은 조건 ②에 맞지 않는다.

풀이모임 {-2}

(다른 방법)

뜻구역 $x\neq\pm1$이므로 두 변에 분모의 최소공통배수 x^2-1을 곱하면

$$x-5+3(x^2-1)=-2(x+1)$$

이 방정식을 풀면 $3x^2+3x-6=0$

$$3(x-1)(x+2)=0$$

따라서 $x=1,\ \ x=-2$

그런데 1은 주어진 방정식의 뜻구역에 들지 않으므로 버린다.

풀이모임 {-2}

문제

다음 방정식을 풀어라.

1) $\frac{4}{3x+2}-\frac{2}{5x-2}=0$ 2) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}=\frac{x}{x-2}$

3) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}=0$ 4) $\frac{5}{3-\frac{2}{x-2}}=x$

례 2. 큰 물주머니에 물을 채우기 위한 크기가 다른 양수기가 두대 있다. 두 양수기를 다 쓰면 물을 채우는데 2시간 24분 걸리고 한 양수기만 쓰면 다른 양수기보다 2시간 더 걸린다. 하나씩 쓰면 각각 몇시간 걸리겠는가?

(풀이) 큰 양수기로 물을 채우는데 걸린 시간을 x라고 하면

작은 양수기로 물을 채우는데 걸린 시간은 $x+2$

채우려는 전체 물량을 1로 볼 때

한시간동안에 큰 양수기가 퍼올리는 물량은 $\frac{1}{x}$

작은 양수기가 퍼올리는 물량은 $\frac{1}{x+2}$

두 양수기가 한시간동안에 퍼올리는 물량은 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$

한편 두 양수기를 다 쓰면 2시간 24분 걸리므로 한시간 동안에 두 양수기가 퍼올리는 물량은 $\frac{1}{2\frac{2}{5}}$

문제의 조건으로부터 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2\frac{2}{5}}$

방정식을 풀면

$$\frac{-5x^2+14x+24}{12x(x+2)}=0$$

$$\begin{cases}-5x^2+14x+24=0\\12x(x+2)\neq 0\end{cases}$$

따라서 $x=4$, $x=-\dfrac{6}{5}$

그런데 $-\dfrac{6}{5}$은 문제의 뜻에 맞지 않으므로 버린다.

답. 큰 양수기는 4시간, 작은 양수기는 6시간

문제

1. 학생들속에서 책읽기운동을 널리 벌려 자연과 사회에 대한 폭넓고 깊은 지식을 소유할데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**원수님의 말씀을 높이 받들고 한 학생이 책을 5 000페지 읽을 계획을 세웠는데 매일 꼭같은 페지수를 읽기로 하였다. 그런데 그가 매일 10페지씩 더 읽기로 한다면 계획을 25일간 앞당길수 있다고 한다. 계획일수는 얼마였는가?
2. 어떤 작업반에서 480m구간의 도로포장을 하는데 매일 작업량을 16m씩 넘쳐 한 결과 기한을 5일간 앞당겼다. 며칠동안에 끝낼 계획이였는가?
3. 대형랭장운반선이 실어온 물고기를 3대의 기중기로 부리려고 한다. 기중기를 하나씩 쓰면 3대를 다 쓰는것보다 첫째것은 6시간, 둘째것은 15시간 더 걸리고 셋째것은 2배의 시간이 걸린다. 3대를 동시에 다 쓰면 몇시간이 걸리겠는가?

2. 분수안같기식

찾기 다음 안같기식들가운데서 분수식이 들어있는 안같기식을 가려내여라.

1) $2x+7-\dfrac{1}{3x+2}>0$ 2) $0.5x+\dfrac{3x+2}{x^2+2x}<0$

3) $2x^2+5x>\dfrac{3x+2}{27}$ 4) $\dfrac{x-7}{x^2}>\dfrac{2x^2+3}{x+9}$

분수식이 들어있는 안갈기식을 **분수안갈기식**이라고 부른다.

알아보기 다음과 같이 하여 얻은것이 주어진 안갈기식의 풀이인가?

$$\frac{x+1}{x-1}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-1>0 \end{cases},\ \begin{cases} x+1\le 0 \\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow x>1,\ x\le -1$$

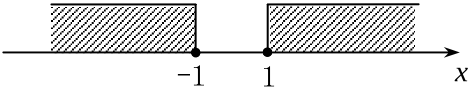


그림 3-1

분수안갈기식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\frac{A}{B}\ge 0$ (또는 >, <, ≤)모양으로 고친 다음 푼다.

이때 $\frac{A}{B}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ B>0 \end{cases},\ \begin{cases} A\le 0 \\ B<0 \end{cases}$

례 1. 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\frac{1}{x}+\frac{2x}{x-1}\ge 2$$

(풀이) 오른변이 0이 되게 마디를 옮기면

$$\frac{1}{x}+\frac{2x}{x-1}-2\ge 0$$

왼변을 통분하고 정돈하면 $\frac{3x-1}{x(x-1)}\ge 0$

그리하여

$$\begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x(x-1)>0 \end{cases},\qquad \begin{cases} 3x-1\le 0 \\ x(x-1)<0 \end{cases}$$

따라서

$$(1)\ \begin{cases} 3x-1\geq 0 \\ x>0 \\ (x-1)>0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3x-1\geq 0 \\ x<0 \\ (x-1)<0 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} 3x-1\leq 0 \\ x>0 \\ (x-1)<0 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} 3x-1\leq 0 \\ x<0 \\ (x-1)>0 \end{cases}$$

그리하여

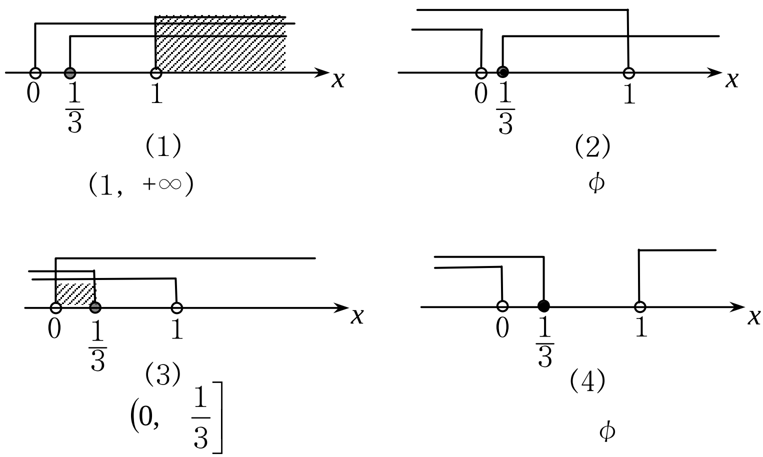


그림 3-2

따라서 풀이모임 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right]\cup(1,+\infty)$

례 2. 다음 안같기식을 풀어라.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}\leq 0$$

(풀이) 뜻구역 $x\neq-2$

량변에 $(x+2)^2$을 곱하면

$$(x-1)(x+1)(x+2)\leq 0$$

안갈기식의 왼변 $(x-1)(x+1)(x+2)$의 값은 $x=1$, -1, -2에서 0이다.

구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$에서 왼변의 부호를 알아보면

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+2$	−	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$(x-1)(x+1)(x+2)$	−	+	−	+

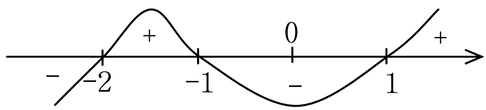


그림 3-3

그리하여 $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$에서 $(x+1)(x+1)(x+2)<0$

이때 $x=1$, -1, -2에서 왼변의 값은 모두 0이다.

여기서 $x+2\neq0$이므로 풀이모임은 $(-\infty, -2)\cup[-1, 1]$

례 3. 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\frac{(x-1)^3}{x+1}\leq 0$$

(풀이)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	−	−	+
$x-1$	−	−	+
$x-1$	−	−	+
$x+1$	−	+	+
$\frac{(x-1)^3}{x+1}$	+	−	+

그리하여 (−1, 1)에서 $\dfrac{(x-1)^3}{x+1}<0$

이때 x=1에서 왼변의 값은 0이고 x=−1에서 왼변은 뜻을 가지지 않으므로 풀이모임은 (−1, 1]

문 제

1. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{x}{x-2}$　　2) $\dfrac{4}{3x+2}<\dfrac{2}{5x-2}$　　3) $-1<\dfrac{x}{2x-1}<1$

2. 농도가 5%인 소금물 100g이 있다. 여기에 물 몇g을 넣으면 농도가 2%와 2.5%사이에 있는 소금물로 되겠는가?

련습문제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{2}{x^2-1}$　　2) $\dfrac{3x-7}{x+5}=\dfrac{x-3}{x+2}$

3) $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{5x-3}{3x+5}$　　4) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

2. 위대한 령도자 **김정일**원수님께서 기술혁신운동을 힘있게 벌릴데 대하여 주신 말씀을 높이 받들고 한 선반공이 720개의 기계부속품을 깎을 과제를 기술혁신을 하여 매일 깎아야 할 계획보다 12개씩 더 깎아 16일간이나 앞당겨 끝냈다. 선반공은 처음 며칠동안에 깎을 과제를 받았는가?

3. 두대의 뻐스가 A와 B에서 각각 서로 마주 향하여 같은 시각에 떠나서 3시간후에 만났다. 두 뻐스는 계속 가던 방향으로 달렸는데 A를 떠난 뻐스는 B에서 떠난 뻐스보다 $2\dfrac{1}{2}$시간만큼 더 늦게 B에 도착하였다. 두 뻐스는 A와 B사이를 각각 몇시간동안에 달렸는가?

4. 강을 따라 12km 떨어져있는 부두사이를 려객선이 갔다오는데 2시간 40분이 걸렸다. 강물의 속도가 3km/h라면 려객선의 속도는 얼마이겠는가?

5. 어떤 동덩어리에 아연 2kg을 넣어 합금을 만들었다. 이 합금 3kg에 또 아연 3kg을 넣어 녹인 결과 동과 아연의 비가 1:2인 합금을 얻었다. 처음에 동은 얼마였는가?

6. 다음 분수안갈기식을 풀어라.

1) $\frac{4}{x^2}>1+\frac{3}{x}$ 2) $\frac{x+3}{x^2+3x+2}>0$ 3) $\frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-3)}>0$

7. 8%의 소금물과 5%의 소금물을 1:x의 비로 혼합하여 y%의 소금물을 만들었다. y를 x의 식으로 표시하고 그라프를 그려라. 또 농도가 7%이상인 소금물을 만들기 위해서는 얼마의 비률로 혼합하면 되겠는가?

제2절. 무리방정식과 무리안갈기식

1. 무리방정식

찾기 다음 방정식들가운데서 무리식이 들어있는 방정식을 가려내여라.

1) $\sqrt{x+1}+x^2=0$ 2) $\sqrt{39}+2x+7=0$

3) $\sqrt[3]{x^2+3}+3x+7=0$

무리식이 들어있는 방정식을 **무리방정식**이라고 부른다.

해보기 다음 방정식의 두 변을 각각 2제곱, 3제곱하여 풀고 이때 얻어진 풀이가 주어진 방정식에 맞는가를 따져보아라.

1) $\sqrt{x+1}=5-x$ 2) $\sqrt[3]{2x-9}=-3$

알아보기 무리방정식을 풀 때 주어진 방정식에 맞지 않는 풀이가 어떤 경우에 생기는가?

무리방정식을 풀 때 다음과 같이 한다.

1) 뿌리기호를 없앤 다음에 푼다.

2) 풀이가 주어진 방정식에 맞는가를 따져본다.

(1) 짝수차뿌리만 들어있을 때에는 끼여든 풀이가 있는가를 따져본다.

(2) 홀수차뿌리만 들어있을 때에는 주어진 방정식의 풀이로 된다.

례 1. $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$을 풀어라.

(풀이) 왼변의 둘째 마디를 오른변에로 옮기면

$$\sqrt[3]{37+x}=1+\sqrt[3]{x}$$

두 변을 각각 3제곱하면

$$37+x=1+3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}+x$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-12=0$$

$$\left(\sqrt[3]{x}-3\right)\left(\sqrt[3]{x}+4\right)=0$$

$$x=27,\ x=-64$$

따라서 풀이모임 {27, −64}

례 2. $\sqrt{9-x^2}=ax+3$을 풀어라.

(풀이) 두 변을 각각 2제곱하면

$$9-x^2=a^2x^2+6ax+9$$

방정식의 풀이를 구하면

$$x[(a^2+1)x+6a]=0$$

$$x=0,\quad x=-\frac{6a}{a^2+1}$$

구한 풀이는 조건 $ax+3\geq 0$에 맞아야 한다.

$x=0$일 때 $ax+3=3\geq 0$이므로 맞는다.

$$x=-\frac{6a}{a^2+1} \text{일 때} \quad ax+3=-\frac{6a^2}{a^2+1}+3=\frac{3-3a^2}{a^2+1}$$

$$=\frac{3(1-a^2)}{a^2+1}=\begin{cases} a^2>1\text{일 때} & \frac{3(1-a^2)}{a^2+1}<0 \\ a^2\le 1\text{일 때} & \frac{3(1-a^2)}{a^2+1}\ge 0 \end{cases}$$

이므로 $a^2 \le 1$일 때만 맞는다.

$a^2>1$일 때는 0만 맞는다.
이리하여 풀이모임은

$a^2 \le 1$ 즉 $-1 \le a \le 1$일 때 $\left\{0,\ -\frac{6a}{a^2+1}\right\}$

$a^2>1$ 즉 $-\infty<a<-1$, $1<a<+\infty$ 일 때 $\{0\}$

문제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x-2}-\sqrt{6x-11}+\sqrt{x+3}=0$

2) $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$

3) $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$

4) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\frac{b}{\sqrt{x-a}}+\frac{a}{\sqrt{x-b}}$

2) $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$

2. 무리안같기식

찾기 다음 안같기식들가운데서 무리식이 들어있는 안같기식을 가려내여라.

1) $\sqrt{2x-3}+x>0$　　2) $\sqrt{3}x^2+7x\le 0$

3) $\sqrt[3]{2^7x}+x^3\ge 0$　　4) $\sqrt{x}\le x+2$

> 무리식이 들어있는 안같기식을 **무리안같기식**이라고 부른다.

무리안같기식에서는 $\sqrt{A}<B$, $\sqrt{A}>B$ 모양의 안같기식을 자주 쓴다.

알아보기 $\sqrt{A}<B$에서

1) A는 어떤 값을 가질수 있는가?

2) 웃식의 량변을 2제곱하려면 B에 어떤 조건이 있어야 하는가?

3) 주어진 안같기식을 풀자면 다음과 같은 련립안같기식을 풀면 되는가?

$$\begin{cases} A\ge 0 \\ B>0 \\ A<B^2 \end{cases}$$

례 1. 다음 안같기식을 풀어라.

$\sqrt{3x+7}<x+1$

(풀이) $\begin{cases} 3x+7\ge 0 & ① \\ x+1>0 & ② \\ 3x+7<(x+1)^2 & ③ \end{cases}$

식 ①을 풀면 $x\ge -\dfrac{7}{3}$

식 ②를 풀면 $x>-1$

식 ③을 풀면 $3x+7<x^2+2x+1$

$$x^2-x-6>0$$

$$(x-3)(x+2)>0$$

따라서 $x<-2$ 또는 $x>3$

식 ①, ②, ③으로부터

$$\left[-\frac{7}{3},\ +\infty\right]\cap(-1,\ +\infty)\cap((-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty))=(3,\ +\infty)$$

풀이모임 (3, +∞)

문제

다음 무리안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x+1}<3-x$ 2) $\sqrt{2x+1}-x+4<0$

3) $x-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

알아보기 $\sqrt{A}>B$ 에서

1) 주어진 식의 량변을 2제곱하려면 왼쪽과 오른쪽에 어떤 조건이 있어야 하는가?

2) 주어진 식에서 오른변이 부수이면 주어진 뜻구역에서는 언제나 안갈기식을 만족시키는가?

3) 주어진 안갈기식을 풀자면 다음과 같은 련립안갈기식을 풀면 되는가?

$$\begin{cases}A\geq 0\\ B<0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}A>0\\ B\geq 0\\ A>B^2\end{cases}$$

례 2. 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\sqrt{x^2-25}>x-1$$

(풀이) 다음 두 련립안갈기식의 풀이의 합을 구하면 된다.

1) $\begin{cases}x^2-25\geq 0 & ①\\ x-1<0 & ②\end{cases}$

또는

$$2)\ \begin{cases} x^2-25>0 & ① \\ x-1\ge 0 & ② \\ x^2-25>(x-1)^2 & ③ \end{cases}$$

1) ①을 풀면 $x^2-25\ge 0$

$$(x+5)(x-5)\ge 0$$

$$\therefore\ x\in(-\infty,\ -5]\cup[5,\ +\infty)$$

②을 풀면 $x-1<0$

$$\therefore\ x\in(-\infty,\ 1)$$

1)의 풀이모임은 ①∩②이므로 $(-\infty,\ -5]$

2) ①을 풀면 $x\in(-\infty,\ -5)\cup(5,\ +\infty)$

②을 풀면 $x\in[1,\ +\infty)$

③을 풀면 $x^2-25>x^2-2x+1$

$$x>13$$

$$\therefore\ x\in(13,\ +\infty)$$

2)의 풀이모임은 ①∩②∩③이므로 $(13,\ +\infty)$

주어진 안갈기식의 풀이모임은

$$(-\infty,\ -5]\cup(13,\ +\infty)$$

문제

다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x^2+2}>2x^2$ 2) $x-\sqrt{x^2-x-6}<-1$

3) $x+2>\sqrt{4x+7}>x-1$

례 3. 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\sqrt{x^2-2ax-1}>2x-a$$

(풀이) 뿌리기호안의 식의 값이 부가 되지 말아야 하므로

$$x^2-2ax-1\ge 0$$

이것을 풀면 $x\ge a+\sqrt{a^2+1}$

$$x\le a-\sqrt{a^2+1}$$

(1) $2x-a<0$ 즉 $x<\frac{a}{2}$일 때

왼변은 부 아닌 값을 잡아야 한다.

그런데 $a-\sqrt{a^2+1}<\frac{a}{2}<a+\sqrt{a^2+1}$이므로

풀이모임은 $\left(-\infty,\ a-\sqrt{a^2+1}\right]$

(2) $2x-a\ge 0$ 즉 $x\ge\frac{a}{2}$일 때

두 변은 부가 아니므로 각각 2제곱하면

$$x^2-2ax-1>4x^2-4ax+a^2$$

$$3x^2-2ax+a^2+1<0$$

그런데 $3x^2-2ax+a^2+1=2x^2+(x-a)^2+1>0$

이므로 이 경우는 성립하지 않는다.

따라서 풀이모임 $\left(-\infty,\ a-\sqrt{a^2+1}\right]$

문 제

다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{2a(a-x)}>a-3x\ (a>0)$ 2) $1+ax<\sqrt{1+x}$

련습문제

1. 다음 무리방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-1}$

2) $\sqrt{3x-10}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-5}$

3) $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$

4) $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17}=6$

2. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $x+\sqrt{x-2}<2\left(x-\sqrt{x-2}\right)$

2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}>\sqrt{3x}$

3) $\sqrt{13x+5}-\sqrt{3x-1}>\sqrt{12x-4}$

4) $\sqrt{2(x-1)(x^2-2)}>2-x-x^2$

3. 반경이 R인 원둘레에 내접하는 직4각형의 면적이 한 변이 ℓ인 바른4각형의 면적과 같아지기 위한 조건을 구하여라.

4. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $|x+1|<2$

$-2<x+1<2$, $-3<x<1$

2) $|3x-4|\le 19$ 3) $\left|\dfrac{x-1}{2}+4\right|>3$ 4) $|x^2-3x+1|<5$

5. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x(2-x)}>x-a$ 2) $x+a>2a\sqrt{x-2}$

제3절. 같기식과 안같기식의 증명

1. 같기식의 증명

같기식의 두 변이 같은 식이면 그 같기식은 늘 성립한다고 말한다.

그러므로 늘 성립한다는것을 밝히는것이 같기식의 증명이다.

례 1. 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B의 값을 정하여라.

$$3x-5=\mathrm{A}(x-2)+\mathrm{B}$$

(풀이) $3x-5=\mathrm{A}x-(2\mathrm{A}-\mathrm{B})$

따라서 $3=\mathrm{A}$

$5=2\mathrm{A}-\mathrm{B}$

따라서 $\mathrm{A}=3$, $\mathrm{B}=1$

례 2. x의 임의의 값에 대하여 ax^2+bx+c의 값이 늘 0이 되려면 $a=b=c=0$이라는것을 증명하여라.

(증명) x의 임의의 값에 대하여

$$ax^2+bx+c=0$$

이라고 하면

$x=0$일 때 $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$

따라서 $c=0$

따라서 $ax^2+bx=0$

$x=1$일 때 $a+b=0$

$x=-1$일 때 $a-b=0$

이로부터 $a=b=0$

즉 $a=b=c=0$

일반적으로 다음 사실이 성립한다.

x의 임의의 값에 대하여

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \text{ 이면 } a_0=a_1=\cdots=a_n=0$$

이다.

문 제

다음 갈기식이 늘 성립하도록 A, B, C, D를 정하여라.

1) $2x^2-6x+7=A(x+1)^2+B(x+1)+C$

2) $5x^3+6x^2+4x-7=A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$

3) $6x^3-4x^2+8x-2=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$

례 3. 다음 갈기식이 늘 성립하도록 A, B의 값을 정하여라.

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

(풀이) 갈기식의 두 변에 x^2+x-2를 곱하면

$$2x+1=A(x+2)+B(x-1)$$

$$2x+1=(A+B)x+2A-B$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

이 련립방정식을 풀면

$$A=1,\ B=1$$

따라서 $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$

이와 같이 분수식을 그보다 간단한 분수식(분자, 분모의 차수가 보다 낮은 분수식)들의 합(차)으로 변형하는것을 **부분분수분해**한다고 말한다.

문 제

1. 다음 분수식을 부분분수분해하여라.

1) $\dfrac{x+5}{x^2+7x+12}$ 2) $\dfrac{12-x}{x(x-3)(x-4)}$ 3) $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

2. $\dfrac{2x}{x^3+1}$ 를 부분분수분해하여라.

3. $\dfrac{x^3+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ 에서 A, B, C를 구하여라.

2. 안같기식의 증명

a, b가 정수이면 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

(증명) $a^2+b^2\geq 2ab$ 이므로 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geq 2\sqrt{ab}$

따라서 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

즉 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

여기서 $a>0$, $b>0$ 일 때 $\dfrac{a+b}{2}$ 를 a와 b의 합평균(산수평균), $\sqrt{ab}$ 를 a와 b의 곱평균(기하평균)이라고 부른다.

례 1. a, b, c, d가 정수일 때 다음 안같기식을 증명하여라.

$$(ab+cd)(ac+bd)\geq 4abcd$$

(증명) a, b, c, d가 정수이므로

$$\frac{ab+cd}{2}\geq\sqrt{ab\cdot cd}>0$$

$$\frac{ac+bd}{2}\geq\sqrt{ac\cdot bd}>0$$

따라서

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geq abcd$$

즉 $(ab+cd)(ac+bd)\geq 4abcd$

문 제

1. a, b, c가 정수일 때 $(a+b)(b+c)(c+d)\geq 8abc$를 증명하여라.
2. x, y가 정수일 때 다음 안갈기식을 증명하여라.

1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$ 2) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geq 8x^3y^3$

3. 둘레가 ℓ인 직4각형가운데서 면적이 제일 크려면 가로와 세로를 어떻게 잡아야 하는가?

례 2. 관으로 물을 뽑는데 물의 흐름속도가 같을 때 관의 수직자름면의 둘레가 같은 조건에서 자름면이 원인 경우가 바른4각형인 경우보다 물흐름량이 크다는것을 증명하여라.

(증명) 물의 흐름속도가 같을 때 관으로 흐르는 물의 량은 그 관의 자름면적에 의하여 정해진다. 자름면의 둘레를 ℓ로 표시하면 둘레가 ℓ인 원의 반경은 $\frac{\ell}{2\pi}$이고 자름면적은 $\pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2$이다.

다음 둘레가 ℓ인 바른4각형의 변의 길이는 $\frac{\ell}{4}$이고 면적은 $\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$이다.

그러므로 이 문제를 풀기 위해서는 $\pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$을 증명하여야 한다.

이제 $\pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$가 성립하려면 $\frac{\pi\ell^2}{4\pi^2}>\frac{\ell^2}{16}$이 성립하여야 한다.

그런데 이 식의 량변에 $\frac{4}{\ell^2}$를 곱하면

$$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4} \quad \text{즉} \quad 4 > \pi$$

따라서 $\pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 > \left(\frac{\ell}{4}\right)^2$

그리하여 관의 자름면이 원일 때 더 많은 량의 물이 흐른다.

문 제

1. $(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 을 증명하여라.

2. $-1 \le \frac{a^2-1}{a^2+1} < 1$ 을 증명하여라.

해보기 $\left(|5|-|-2|\right)$와 $|5+(-2)|$, $\left(|5|+|-2|\right)$의 크기를 비교해보아라.

$$|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$$

(증명) $|a|-|b| \le |a+b| \qquad (1)$

을 먼저 증명하자.

량변을 2제곱하면

$$|a|^2 - 2|a|\cdot|b| + |b|^2 \le (a+b)^2$$

따라서 $a^2 - 2|a|\cdot|b| + b^2 \le a^2 + 2ab + b^2$

여기서 $-2|a||b| \le 2ab$

이므로 (1)이 성립한다.

$$|a+b| \le |a|+|b| \qquad (2)$$

도 마찬가지로 증명된다.

우의 명제로부터

$$|a_1+a_2+a_3| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|$$

이 나온다.

문 제

$|a|<1$, $|b|<1$일 때 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$을 증명하여라.

련습문제

1. 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B, C, D, E의 값을 정하여라.

1) $3x^2-5x+7=\mathrm{A}(x+3)^2+\mathrm{B}(x+3)+\mathrm{C}$

2) $2x^4-3x^3+x^2-4=\mathrm{A}(x-2)^4+\mathrm{B}(x-2)^3+\mathrm{C}(x-2)^2+\mathrm{D}(x-2)+\mathrm{E}$

2. 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B의 값을 결정하여라.

1) $\dfrac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}=\dfrac{\mathrm{A}}{3x+2}+\dfrac{\mathrm{B}}{5x+3}$

2) $\dfrac{2}{4x+3}+\dfrac{\mathrm{B}}{7x+6}=\dfrac{\mathrm{A}x+27}{28x^2+45x+18}$

3. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $|a|+|b|\ge|a-b|$　　2) $|a|-|b|\le|a-b|$

4. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\dfrac{1}{2}x-1<\dfrac{2x-1}{3}$　　2) $\dfrac{x}{x-2}>3$

5. $|x|>r>0$, $a\ne0$일 때 $\left|\dfrac{1}{ax}\right|<\dfrac{1}{|a|r}$을 증명하여라.

6. n이 자연수일 때 $\left|\dfrac{5n}{n+1}-5\right|\le0.001$을 풀어라.

복습문제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$

2) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$

3) $\frac{x+36}{x^3-1}=\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2-x+6}{x^2+x+1}$

4) $\frac{10}{x^2-1}-\frac{7}{x^2+x+1}=\frac{2x-1}{x^3-1}$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3$

2) $\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x-2}-\frac{6}{7}=\frac{x}{x+1}+\frac{x+5}{x+4}$

3) $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$

4) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}=\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

5) $\sqrt{3x+2}-6=\sqrt[4]{3x+2}$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{2x-1}=2\sqrt{x}-3$

2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$

3) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$

4. 지점 A를 떠나 10km 떨어진 지점 B까지 갔다왔는데 갈 때는 걸어가고 올 때는 자전거를 타고왔다. 그리하여 올 때는 갈 때보다 1시간 50분 적게 걸렸다. 자전거의 속도는 걸음속도보다 매 시간 11km 빠르다고 한다. 자전거의 속도를 구하여라.

5. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\frac{2x-3}{x+1}>x+3$

2) $\frac{3x^2-10x+2}{2x^2-3x+7}>0$

3) $\frac{6x^2-17x+12}{2x^2-5x+2}>0$

6. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x} < 2 - x$ 2) $\sqrt{1+x} \geq x - 1$ 3) $-\sqrt{2(x+1)} > x - 5$

7. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $|x+2| > |4-x|$ 2) $\frac{1}{2}|x+3| - |x-5| > 1$

3) $x + 4 \leq -|x+3|$ 4) $\sqrt{2x - x^2} < |x-1|$

8. 다음 같기식이 늘 성립하게 A, B, C, D의 값을 정하여라.

1) $\frac{5x^2+5x}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{\mathrm{A}}{x+2} + \frac{\mathrm{B}x+c}{x^2+1}$

2) $\frac{3x-7}{(x+3)(x+1)^3} = \frac{\mathrm{A}}{x+3} + \frac{\mathrm{B}}{x+1} + \frac{\mathrm{C}}{(x+1)^2} + \frac{\mathrm{D}}{(x+1)^3}$

9. 다음 같기식을 증명하여라.

$abc = 1$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ 일 때 $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bc} = 1$

10. 두 안같기식 $\frac{x-a}{x-b} > 0$ 과 $(x-a)(x-b) > 0$ 의 풀이모임이 같다는 것을 증명하여라.

11. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) a, $b \in \mathrm{R}$ 일 때

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

2) $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$$

3) $a + b \geq 0, \quad c + d \geq 0$ 일 때

$$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(c+d) \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

12. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 일 때 $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$

2) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 일 때 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 4\frac{\sqrt{ab}}{c}$

제4장. 도형에서의 크기관계

제1절. 3각형에서의 크기관계

1. 3각형의 각과 변의 크기관계

알아보기 직3각형 ABC에서

1) ∠B>∠C이다. 이때 $b > c$ 인가?

2) ∠C>∠A이면 $c > a$ 인가?

정리 1. △ABC 에서

1) ∠B >∠C⇒ $b > c$

2) ∠B <∠C⇒ $b < c$

3) ∠B=∠C⇒ $b = c$

(증명) 먼저 1)을 증명하자.

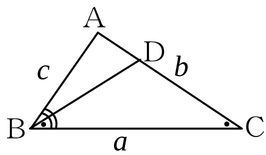


그림 4—1

변 AC에 ∠DBC=∠C 되게 점 D를 찍으면

△ABD에서

AD+DB>AB

그런데 DB=DC (△DBC는 2등변3각형)

따라서

AD+DC>AB

즉 $b>c$

마찬가지로 2)도 증명된다.

3)은 2등변3각형이 될 조건에 의하여 나온다.

> **정리 2.** （거꿀정리） △ABC에서
>
> 1） $b>c \Rightarrow \angle B > \angle C$
>
> 2） $b<c \Rightarrow \angle B < \angle C$
>
> 3） $b=c \Rightarrow \angle B = \angle C$

(증명) 먼저 1)을 귀유법으로 증명하자.

이제 ∠B＞∠C가 아니라고 하자.

그러면 ∠B＜∠C이거나 ∠B＝∠C 이다.

그러면 정리 1에 의해 $b<c$ 이거나 $b=c$ 이다.

이것은 정리 1에 모순된다.

∴ ∠B＞∠C

마찬가지로 2)도 증명된다.

3)은 2등변3각형의 성질에 의해서 나온다.

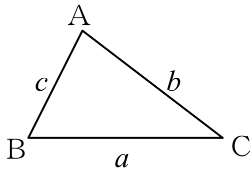


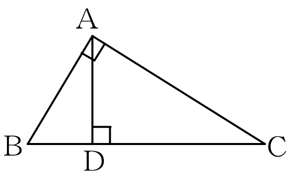
그림 4—2

문 제

1. 2등변3각형의 밑변에 놓이는 한 점과 정각의 정점을 맺는 선분은 옆변보다 작다. 증명하여라.
2. △ABC에서 AB＞AC일 때 BC의 임의의 점을 M이라고 하면 AB＞AM이다. 증명하여라.

2. 직3각형에서의 비례선분

> **정리 3.** 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변 BC에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면
>
> 1） $AD^2 = BD \cdot DC$
>
> 2） $AB^2 = BD \cdot BC$
>
> 3） $AC^2 = CD \cdot BC$



(증명찾기) 1) $AD^2 = BD \cdot DC$

↓ (이것이 성립하려면)

$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$

↓ (이것이 성립하려면)

$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$

↓ (이것이 성립하려면)

$\angle B = \angle DAC$

↓

이것은 조건으로부터 나온다.

(증명) 1) $\triangle ABD$와 $\triangle CAD$에서

$\angle BDA = \angle ADC = \angle R$ (1)

그리고 $\angle B = \angle R - \angle BAD$

$\angle DAC = \angle R - \angle BAD$

$\therefore \angle B = \angle DAC$ (2)

(1), (2)로부터

$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$

$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$

즉 $AD^2 = BD \cdot DC$

마찬가지로 2), 3)도 증명된다.

정리를 증명할 때 《증명의 길》이 잘 보이지 않으면 정리 3에서와 같이 결론으로부터 시작하여 조건에로 가는 길을 찾으면 편리하다. 이 거꿀과정을 《증명찾기》라고 부르기로 한다.

《증명찾기》자체도 하나의 증명이라고 볼수 있다.

세 선분 a, b, c에서 $a:b=b:c$ 즉 $b^2=ac$ 일 때 b를 a와 c의 **비례가운데마디**라고 부른다.

실례로 $AD^2=BD \cdot DC$에서 AD는 BD와 DC의 비례가운데마디이다.

상 식

우리 선조들이 리용한 《황금비》

우리 선조들은 집을 짓거나 탑을 세울 때 비례관계를 잘 리용하였다.

고구려 동명왕릉의 정릉사의 금당은 너비와 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$ 되게 지었고 중문은 1:2의 비로, 동금당과 서금당은 $1:\sqrt{3}$ 의 비로 지었다.

고구려의 왕궁이였던 안학궁의 남문은 《황금비》(중말비)인 약 5:8의 비로 지었다.

《황금비》는 AM:MB = MB:AB로 되는 비로서 《아름다운 비》라고 하여 건축물과 미술작품 등에 많이 리용되여왔다.

우리 나라 녀성들이 즐겨입는 조선치마저고리의 저고리와 치마에 의해 분할되는 키의 부분들은 대체로 《황금비》에 가깝다. 그러므로 녀성들이 치마저고리를 입으면 매우 아름답게 보이는것이다.

문 제

1. 그림 4-3을 보고 두 선분 a, b의 비례가운데마디 x를 구하는 방법을 말하여라.

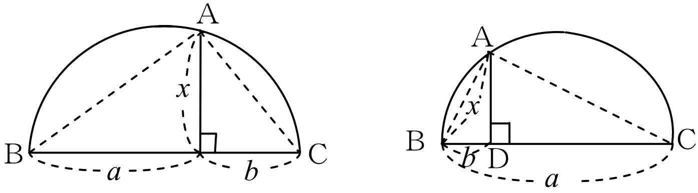


그림 4-3

2. 직3각형의 직각의 정점에서 그은 높이 h가 빗변을 5cm, 7.2cm인 두 선분으로 나누었다. 높이 h와 두 직각변을 구하여라.

3. 피다고라스의 정리

> **정리 4.** (피다고라스의 정리)
> 직3각형에서 두 직각변의 2제곱의 합은 빗변의 2제곱과 같다. 즉
>
> $$a^2 = b^2 + c^2$$

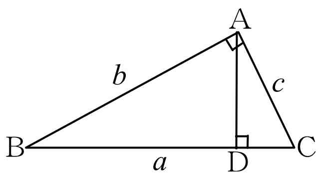


그림 4—4

(증명) 정점 A에서 BC에 수직선분 AD를 그으면 정리 3에 의하여

$AB^2 = BD \cdot BC$

$AC^2 = DC \cdot BC$

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC$

$= (BD + DC)BC = BC^2$

즉 $a^2 = b^2 + c^2$

례 1. 한 변이 2인 바른3각형의 높이를 구하여라.(그림 4-5)

(풀이) 구하려는 높이를 x 라고 하면 피다고라스의 정리에 의하여

$x^2 + 1^2 = 2^2$

$x^2 + 1 = 4$

$x^2 = 3 (x > 0)$

$\therefore\ x = \sqrt{3}$

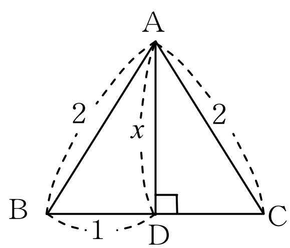


그림 4—5

례 2. 한 직각변이 1인 직2등변3각형의 빗변을 구하여라.(그림 4-6)

(풀이) 직2등변3각형의 두 밑각은 45° 이다.

구하려는 빗변을 x라고 하면

피다고라스의 정리에 의하여

$x^2=1^2+1^2$

$x^2=1+1=2(x>0)$

$\therefore\ x=\sqrt{2}$

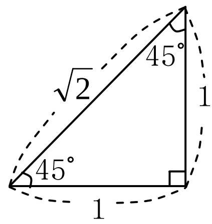


그림 4—6

례 1, 2로부터 다음과 같은 값을 얻을수 있다.

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45° = 1$$

이것을 표로 묶으면 다음과 같다.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

문 제

1. 그림 4—7에서 선분 AB의 길이는 $AB=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ 이다. 왜 그런가?

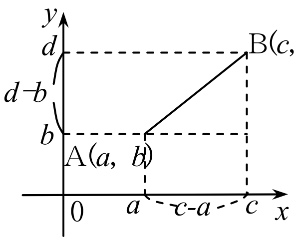


그림 4—7

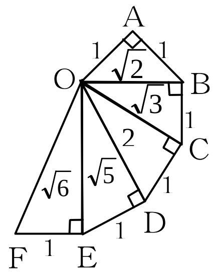


그림 4—8

2. 그림 4-8에서 $OB=\sqrt{2}$, $OC=\sqrt{3}$, $OD=2$, $OE=\sqrt{5}$, $OF=\sqrt{6}$ 이다. 왜 그런가?

3. 길이 60cm, 너비 40cm인 직4각형의 대각선의 길이를 구하여라.

> **정리 5.** △ABC에서 BC= a, AC= b, AB= c 라고 하면
>
> 1) ∠A : 뾰족각 ⇒ $b^2+c^2>a^2$
>
> 2) ∠A : 무딘각 ⇒ $b^2+c^2<a^2$

증명) 1) ∠A가 뾰족각일 때 선분 AC를 돌려 AC=AC_1, $\angle C_1AB$=∠R 되게 하면 직3각형 C_1AB에서

$$b^2+c^2=BC_1{}^2$$

두 변이 같은 3각형에서 $\angle C_1AB>\angle CAB$이므로 $BC_1>a$

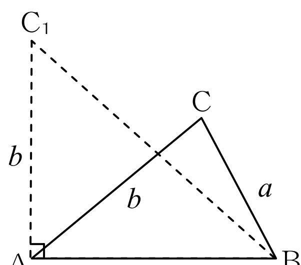


그림 4—9

따라서 $b^2+c^2>a^2$

2)도 마찬가지로 증명된다.

> **정리 6.** △ABC에서 BC＝a, AC＝b, AB＝c라고 할 때
> 1) $b^2+c^2>a^2 \Rightarrow \angle A$：뾰족각
> 2) $b^2+c^2<a^2 \Rightarrow \angle A$：무딘각
> 3) $b^2+c^2=a^2 \Rightarrow \angle A$：직각

(증명) 1) $b^2+c^2>a^2$일 때 ∠A가 뾰족각이 아니라고 해보자.

∠A가 직각이면 $b^2+c^2=a^2$

∠A가 무딘각이면 $b^2+c^2>a^2$

이것은 조건에 모순된다. 따라서 ∠A는 뾰족각이다.

2), 3)도 같은 방법으로 증명된다.

문 제

1. 정리 5의 2)를 증명하여라.
2. 정리 6의 2)를 증명하여라.
3. 세 변의 길이가 다음과 같은 3각형은 어떤 3각형인가?(각에 따라 갈라놓아라.)
   1) 35m, 34m, 36m
   2) 17dm, 21dm, 13dm
   3) 39cm, 4cm, 40cm

련습문제

1. 두 원둘레가 사귀면 중심사이의 거리는 반경의 합보다 작고 차보다 크다. 증명하여라.
2. 바른3각형의 두 변의 점을 맺는 선분은 한 변보다 크지 않다는것을 증명하여라.(그림 4-10)

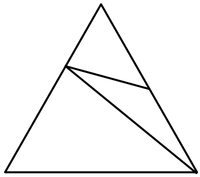


그림 4-10

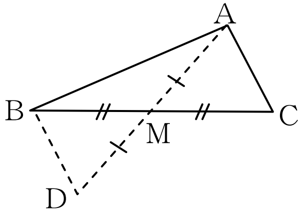


그림 4-11

3. △ABC의 가운데선을 AM이라고 하면 AB+AC>2AM 이라는것을 증명하여라.(그림 4-11)

4. 반경이 R인 원에 내접하는 바른4각형과 외접하는 바른4각형의 한 변의 길이는 얼마인가?

5. 한 변이 8cm인 바른3각형이 있다. 내접하는 원의 반경을 구하여라.

6. 주어진 두 바른4각형의 면적의 합 또는 차와 같은 면적을 가진 바른4각형을 그려라.

7. 3각뿔의 높이는 8cm이고 밑면의 세 변이 각각 3cm, 4cm, 5cm이다. 밑면의 면적과 그의 체적을 구하여라.(그림 4-12)

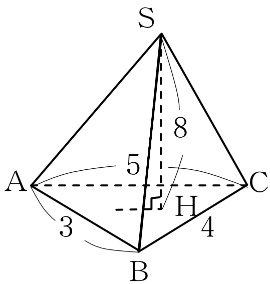


그림 4—12

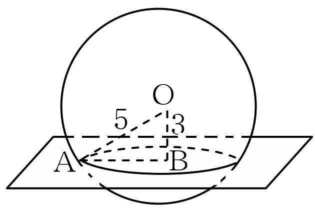


그림 4-13

8. 반경이 5cm인 구의 중심에서 3cm의 거리에 있는 평면으로 잘랐을 때 생기는 자름면(원)의 반경을 구하여라.(그림 4-13)

제2절. 3각형의 아낙각과 바깥각

정리. △ABC 에서
1) ∠A의 2등분선이 AM⇒다른 두 변의 비로 맞은변 BC를 내분
2) ∠A의 바깥각의 2등분선이 AN⇒다른 두 변의 비로 맞은 변 BC를 외분

조건. △ABC에서
1) AM:∠A의 2등분선
2) AN : ∠A의 바깥각의 2등분선

결론. 1) $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$

2) $\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}$

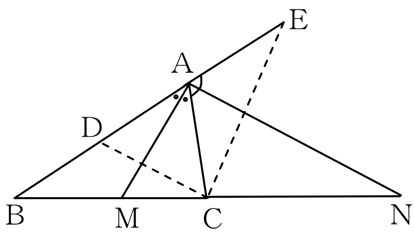


그림 4—14

(증명) 점 C를 지나 AN, AM에 각각 평행인 직선을 그어 직선 AB와 사귀는 점을 각각 D, E라고 하자.

1) AM//EC이므로

$\frac{AB}{AE}=\frac{BM}{MC}$ (1)

또 ∠MAC＝∠ACE

∠BAM＝∠AEC

조건에 의하여

∠MAC＝∠BAM이므로

∠ACE＝∠AEC

∴ AC＝AE (2)

(1), (2)에 의하여

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC} \qquad (3)$$

즉 AM이 ∠A의 2등분선⇒$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$

2) AN//CD이므로 $\frac{AB}{AD}=\frac{BN}{NC} \qquad (4)$

또 ∠CAN=∠ACD

∠NAE=∠CDE

조건에 의하여 ∠CAN=∠NAE이므로

∠ACD=∠CDA

∴ AD=AC (5)

(4), (5)에 의하여 $\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC} \qquad (6)$

즉 AN이 ∠A의 바깥각의 2등분선⇒$\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}$

이 정리의 거꿀도 성립한다.

문 제

1. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선의 사귐점을 I라고 하고 직선 AI가 BC와 사귀는 점을 P라고 하면

AB:AI:AC=PB:PI:PC

임을 증명하여라.

2. △ABC의 내심을 I라고 하고 AI의 연장선과 BC가 사귀는 점을 D라고 하면

$$\frac{AI}{DI}=\frac{AB+AC}{BC}$$

임을 증명하여라.

3. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선이 AC, AB와 사귀는 점을 각각 D, E라고 할 때 BE=CD이면 △ABC는 2등변3각형임을 증명하여라.

련습문제

1. △ABC의 ∠B의 2등분선을 BD라고 하자.

1) AB＝10cm, BC＝15cm, AC＝20cm일 때 AD와 DC의 길이를 구하여라.

2) AD:DC＝8:5, AB ＝16m일 때 BC의 길이를 구하여라.

2. 점 D는 △ABC의 변 BC의 점이다. 다음과 같은 경우에 AD는 ∠A의 2등분선으로 되는가?

1) AB＝12cm, AC＝15cm, BD＝4cm, DC＝5cm

2) AB＝12cm, AC＝56cm, BD:DC＝14:3

3. △ABC의 한가운데선을 AD라고 하고 ∠ADB, ∠ADC의 2등분선이 그 맞은 변과 사귀는 점을 각각 E, F라고 할 때 EF//BC임을 증명하여라.

4. △ABC에서 다음것을 증명하여라.(그림 4-15)

1) AM이 BC를 다른 두 변의 비로 내분하면 AM은 ∠A의 아낙각의 2등분선이다.

2) AN이 BC를 다른 두 변의 비로 외분하면 AN은 ∠A의 바깥각의 2등분선이다.

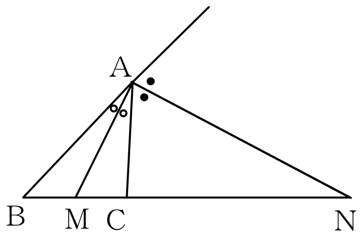


그림 4-15

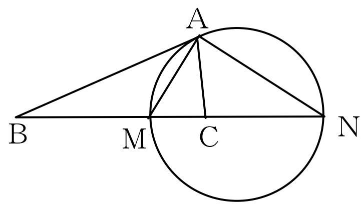


그림 4-16

5. 선분 BC를 $m:n$으로 내분 및 외분하는 점을 각각 M, N이라고 하자. 평면에서 두 점 B, C까지의 거리의 비가 $m:n$인 점 A는 선분 MN을 직경으로 하는 원둘레에 있다. 왜 그런가? (그림 4-16)

제3절. 원에서의 크기관계

> **정리 1.** (가름선에 관한 정리)
>
> 한 원에서 두 활줄이 사귀면 그 사귐점에서 나누인 매개 활줄의 두 부분의 적들은 서로 같다.

조건. 원 O에서 AB, CD는 활줄, AB와 CD의 사귐점 M

결론. AM・MB＝CM・MD

(증명찾기)

AM・MB＝CM・MD

↓ (이것이 성립하려면)

$\frac{AM}{MC}=\frac{DM}{MB}$

↓ (이것이 성립하려면)

△MAC∽△MDB

↓ (이것이 성립하려면)

∠A=∠D

(활등 $\overset{\frown}{CB}$에 대한 원둘레각이므로 같다.)

(증명) △MAC와 △MDB에서

∠A＝∠D (활등 $\overset{\frown}{CB}$에 대한 원둘레각)

∠AMC=∠DMB (맞문각)

∴ △MAC∽△MDB

∴ $\frac{AM}{MC}=\frac{DM}{MB}$

∴ AM・MB＝CM・MD

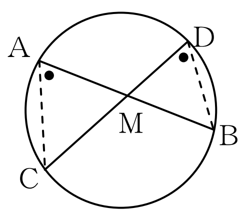


그림 4-17

문 제

1. 한 원의 두 활줄 AB와 CD가 점 M에서 사귀였다. AM＝6cm, MB＝3cm, MD＝0.5cm일 때 MC의 길이를 구하여라.
2. 직경이 20m인 원둘레가 있다. 길이가 16m인 활줄에 수직인 직경의 두 부분의 길이를 구하여라.
3. 그림 4—18은 축받치개의 자름면을 나타내고있다. 여기서 축의 직경 CE는 4.7cm , CD는 2cm이다. AB의 길이를 구하여라.

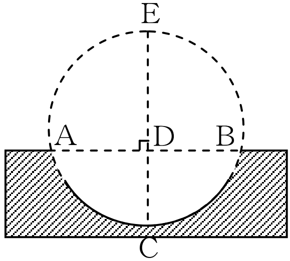


그림 4-18

정리 2. (거꿀정리) 점 M에서 사귀는 두 선분 AB와 CD가 있다. AM・MB=CM・MD이면 네 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 있다.

(증명) 귀유법으로 증명하자.

점 A, B, C를 지나는 원둘레 밖에 D가 놓인다고 하자. 반직선 CD와 원둘레가 사귀는 점을 D_1이라고 하면 정리 1에 의하여

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD_1$$

이것은 AM・MB＝CM・MD에 모순된다.

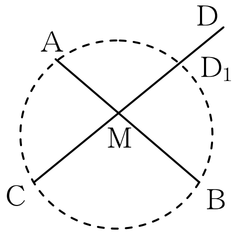


그림 4—19

∴ 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.

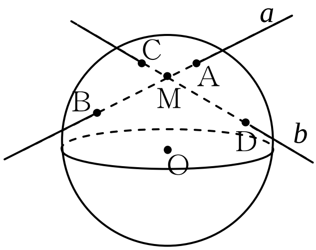
탐 구

구안에 어떤 점 M을 지나는 두 직선 a, b가 구면과 사귀는 점을 A, B ; C, D 라고 하자.

1) 이때 AM・MB와 CM・MD를 비교하여라.

2) 점 M을 지나는 다른 직선 c가 구면과 사귀는 점을 E, F라고 할 때 ME・MF와의 관계는 어떤가?

3) 어떤 결과를 얻을수 있는가?



문 제

1. 그림 4-20에서 네 점 A, B, C, D가 한 원둘레에 있는가를 밝혀라.

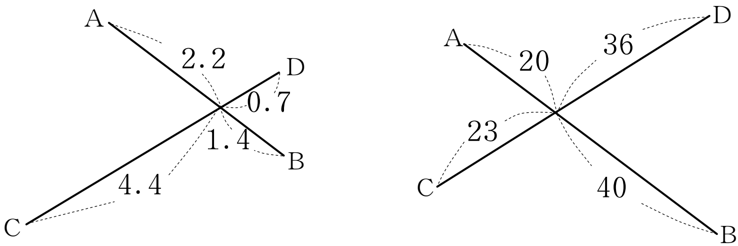


그림 4-20

2. 지금까지 학습한 네 점이 한 원둘레에 놓일 조건들을 묶어보아라.

정리 3. (가름선과 접선에 관한 정리)

원밖의 한 점에서 가름선을 그으면 그 점으로부터 가름선과 원둘레와의 사귐점까지 이르는 두 선분의 적은 그 점에서 그은 접선의 2제곱과 같다.

조건. MC는 접선, MB는 가름선
결론. $MC^2 = MA \cdot MB$

(증명찾기)

$MC^2 = MA \cdot MB$

↓ (이것이 성립하려면)

$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$

↓ (이것이 성립하려면)

$\triangle MAC \backsim \triangle MBC$

↓

$\angle M$ 은 공통, $\angle MCA = \angle MBC$ (조건)

(증명) $\triangle MAC$와 $\triangle MBC$에서
$\angle M$:공통각
$\angle MCA = \angle MBC$
$\therefore \triangle MAC \backsim \triangle MBC$
따라서 $\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$
즉 $MA \cdot MB = MC^2$

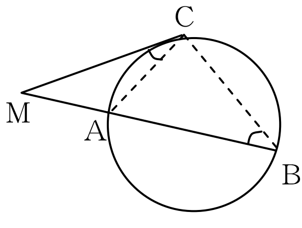
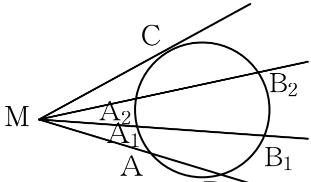


그림 4-21

系. 원밖의 한 점에서 가름선들을 그으면 그 점으로부터 매개 가름선이 원둘레와 사귀는 두 점까지 이르는 두 선분의 적들은 같다. 즉



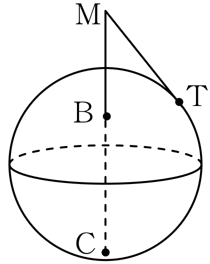
$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = \cdots$$

탐 구

구밖의 한 점 M에서 접선 MT를 긋고 구와 사귀는 직선 MC를 그어 구면과 B, C에서 사귄다고 하자. 이때 사귀는 직선 MC를 아무렇게나 그어도

$$MT^2 = MB \cdot MC$$

인가?



문 제

1. 그림 4—22에서 점 M에서 바라볼수 있는 가장 먼거리 MT를 구하여라. 높이는 h이다. 지구의 반경을 R라고 하고 계산하여라.

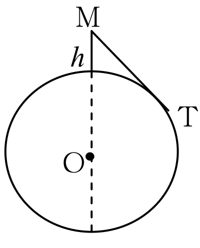


그림 4-22

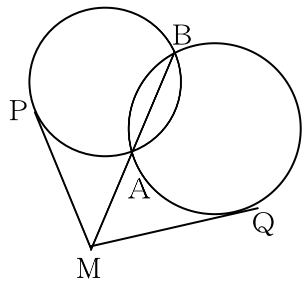


그림 4-23

2. 두 원둘레가 사귈 때 공통활줄의 연장선의 한 점에서 두 원에 접선을 그으면 그 점에서 접점까지의 거리들은 서로 같다. 증명하여라. (그림 4-23)

> **정리 4.** (거꿀정리)
> 원 O의 가름선에서 점 M을 원밖에 잡고 원둘레에 점 C를 잡았을 때 MA·MB=MC^2이면 MC는 원 O의 접선이다.

(증명) MC가 접선이 아니라고 해보자. M에서 원 O에 접선 MC_1을 그으면 정리 3에 의하여

$$MC_1^2=MA\cdot MB$$

이것은

$$MC^2=MA\cdot MB$$

이라는 조건에 모순된다.

∴ MC는 원 O의 접선이다.

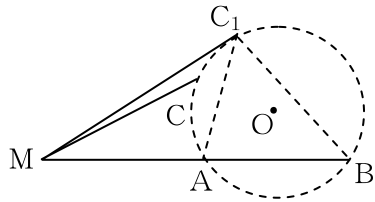


그림 4-24

문 제

1. 그림 4-25에서 다음과 같은 경우에 MC가 △ABC의 외접원에 접하겠는가를 밝혀라.

1) MC=6.4, MA=3.2, AB=9.6

2) BM=10, AM=4.1, MC=8

2. 그림 4-26에서 CA⊥MB이고 AB=3, AC=4, MB=$\frac{25}{3}$ 이다. BC가 △ACM의 외접원에 접하겠는가?

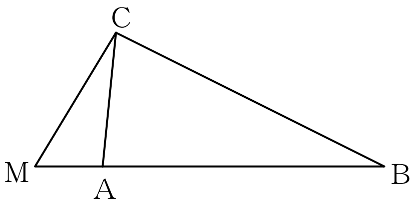


그림 4-25

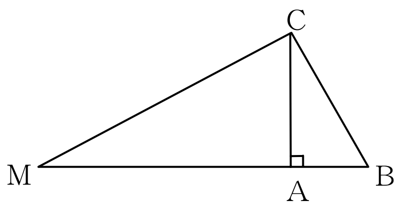


그림 4-26

련습문제

1. 그림 4-27에서 원 O의 반경은 5cm이고 OM=3cm이다. AM·BM은 얼마인가?
2. 원둘레의 점으로부터 한 직경에 내린 수직선에 의하여 그 직경이 4.8cm와 2.7cm의 두 부분으로 나누어졌다. 그 수직선의 길이를 구하여라.
3. 직경 CD에 수직인 활줄 AB가 CD와 점 E에서 사귀였다. AB=6cm, CE=1.5cm이면 직경의 길이는 얼마인가?

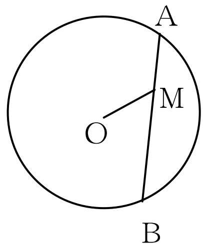


그림 4—27

4. 폭이 1.435m인 철길이 A, B에서 구부러지면서 갈라져나가있다. BC=42.4m일 때 활등 $\overset{\frown}{AC}$의 반경을 구하여라.(그림 4-28)
5. 철길이 도는데를 원둘레모양으로 하려 하는데 이때 그 반경을 145m보다 작지 않게 하려고 한다. 다음과 같이 할수 있는가?
   1) 철길의 두 점을 맺는 활줄의 길이가 100m, 이 활줄에 의하여 생기는 활형의 높이가 10m
   2) 활줄의 길이가 50m, 활형의 높이가 2m

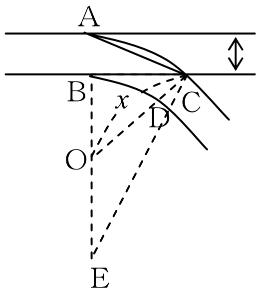


그림 4—28

6. △ABC안에 점 P를 정하고 △ABP, △ACP의 외접원을 그릴 때 이 두 원둘레가 변 BC와 각각 D, E에서 사귀고 PD=PE이면 BE:CD=AB:AC임을 증명하여라.
7. 원 O의 활등 $\overset{\frown}{AB}$(작은쪽 활등)의 점 P로부터 그은 두 활줄 PE, PF가 활줄 AB와 사귀는 점을 각각 C, D라고 하자. 만일 AC=DB, PC=DF이면 PE=PF임을 증명하여라.
8. AB를 직경으로 하는 원둘레 O에 있는 한 점 P로부터 AB에 수직인 활줄 PQ를 긋고 AB와의 사귐점을 C라고 하자. P를 중심으로 하고 PC를 반경으로 하는 원을 그리고 처음 원둘레와의 사귐점을 R, S라고 하면 활줄 RS는 PC를 2등분한다는것을 증명하여라.

제4절. 자리길 증명

다음의 자리길은 흔히 리용되는 자리길(기본자리길)이다.

1) 한 점 O로부터 r만 한 거리에 있는 점의 자리길은 원둘레 O(r)이다.
2) 일정한 선분 a를 각 α로 보는 점의 자리길은 a를 활줄로 하고 각 α를 품는 활형의 활등이다. (끌점 제외)
3) 일정한 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 두 점을 맺는 선분의 수직2등분선이다.
4) 각의 두 변으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 각의 2등분선이다.
5) 직선 ℓ로부터 a(일정)만 한 거리에 있는 점의 자리길은 직선 ℓ로부터 a만 한 거리에 있으며 그에 평행인 두 직선이다.

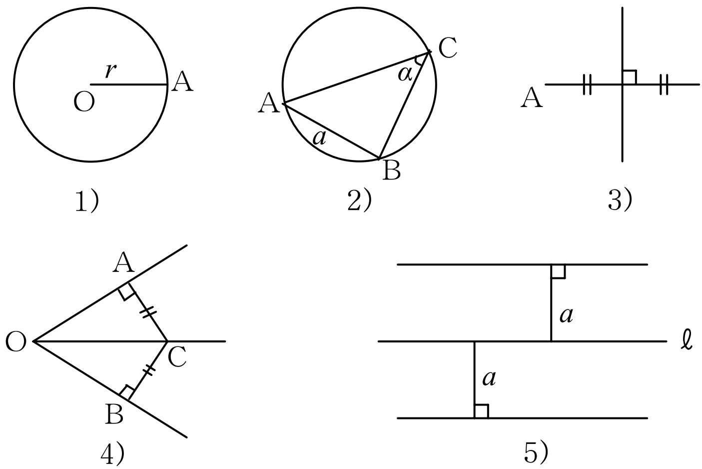


그림 4-29

한 점 O로부터 3만 한 거리에 있는 점은 원둘레 O(3)에 놓인다. 원둘레 O(3)가 점 O로부터 3만 한 거리에 있는 점의 자리길이라는것을 증명하려면 O에서 3만 한 거리에 있는 점은 O(3)에 놓인다는것과 거꾸로 O(3)에 있는 임의의 점을 A라고 하면 OA=3이라는것을 밝혀야 한다.

자리길증명

도형 F가 조건 q를 만족시키는 점의 자리길이라는것을 증명하기 위해서는 다음과 같은 두가지를 밝혀야 한다.

1) 조건 q를 만족시키는 점은 도형 F에 있다.

2) 도형 F에 있는 점은 조건 q를 만족시킨다.

례 1. 점 A와 이 점을 지나지 않는 직선 ℓ의 점 Q를 맺는 선분 AQ를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 자리길은 ℓ에 평행인 직선이다.

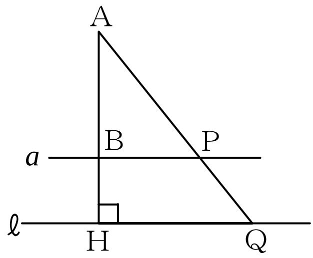


그림 4—30

(증명) 1) 점 A에서 직선 ℓ에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 선분 AH를 $m:n$으로 내분하는 점 B는 일정한 점이며 조건에 맞는다.

조건을 만족시키는 다른 임의의 점을 P라고 하면

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{m}{n}$$

이므로

$$\frac{AB}{BH}=\frac{AP}{PQ}=\frac{m}{n}$$

그러므로 BP//HQ

즉 점 P는 일정한 점 B를 지나며 ℓ에 평행인 직선 a에 있다.

2) 거꾸로 직선 a의 임의의 점을 P라고 하자.

AP의 연장선이 직선 ℓ과 사귀는 점을 Q라고 하면 $\ell // a$이므로

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{AB}{BH}=\frac{m}{n}$$

즉 P는 조건을 만족시킨다.

문 제

1. 점 A와 이 점을 지나지 않는 직선 ℓ의 점 Q를 맺는 선분 AQ를 $m:n$의 비로 외분하는 점의 자리길은 A에서 ℓ에 그은 수직선분을 주어진 비로 나누는 점을 지나며 ℓ에 평행인 직선이다. 증명하여라.
2. 평행인 두 직선 a, b에 이르는 거리가 같은 점의 자리길은 a, b에 수직인 선분 AB(A∈a, B∈b)의 가운데점을 지나며 a에 평행인 직선이다. 증명하여라.

자리길문제에서는 증명할것을 요구하는 문제와 자리길을 찾아낼것을 요구하는 문제가 있다. 자리길을 찾아낼것을 요구하는 문제를 풀 때에는 먼저 조건에 맞는 점 P가 어떤 도형 F에 있다는것을 밝히고 다음에 F에 있는 임의의 점이 조건을 만족한다는것을 밝힌다.

례 2. 일정한 선분 BC를 변으로 하는 등변4각형의 대각선의 사귐점의 자리길을 구하여라.

(풀이) 조건을 만족시키는 점을 P(등변4각형 ABCD의 대각선의 사귐점)라고 하자.

그러면 ∠BPC=∠R(일정)

따라서 점 P는 일정한 선분 BC를 직경으로 하는 원둘레에 있다.

거꾸로 그 원둘레의 임의의 점을 P라고 하자. (B, C는 제외)

점 P에 관한 점 B, C의 대칭점을 각각 D, A라고 하면

BP=PD, CP=PA, AC⊥BD

그러므로 △PBC≡△PCD≡△PDA≡△PAB(변각변)

따라서 BC=CD=DA=AB

ABCD는 등변4각형

점 B, C는 조건을 만족시키지 않는다.

이리하여 구하려는 점의 자리길은 BC를 직경으로 하는 원둘레(점 B, C는 제외)이다.

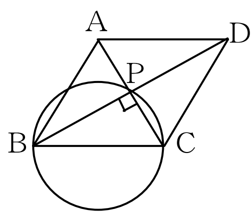


그림 4—31

문 제

1. 주어진 활형 AQB의 활등 $\overset{\frown}{AB}$에서 움직이는 점 Q가 있다. AQ의 연장선에 QB=QP 되게 잡은 점 P의 자리길을 구하여라.
2. 원 O(r)밖에 있는 점 A에서 그은 가름선 AMN(M, N은 원둘레의 점)을 그을 때 활줄 MN의 가운데점 P의 자리길을 구하여라.

련습문제

1. 원둘레 O(r)의 점 A에서 이 원과 접하는 원의 중심의 자리길을 구하여라.
2. 일정한 선분 AB의 끝점 A, B가 서로 수직인 두 직선 XX′, YY′에서 움직일 때 선분 AB의 가운데점의 자리길을 구하여라.
3. 일정한 직선 a와 그밖의 점 A가 있다. 직선 a의 임의의 점 Q와 A를 두 정점으로 하는 바른3각형의 정점 P의 자리길을 구하여라.
4. 각 ∠XOY의 변 OX, OY에 각각 선분 AB, CD가 있다. 각의 아낙에 있으면서 면적 S(△ABP)=S(△CDP)를 만족시키는 점 P의 자리길을 구하여라.
5. 주어진 두 점으로부터의 거리의 2제곱의 합이 일정한 점의 자리길을 구하여라.
6. 점 A와 일정한 원 O(r)가 있다. 점 A와 그 원둘레의 점 P를 맺는 선분 AP를 $m:n$으로 내분하는 점의 자리길을 구하여라.

복습문제

1. 3각형의 제일 큰 변에 붙어있는 두 아낙각은 반드시 뾰족각이다. 증명하여라.
2. 반경이 5cm인 원이 있다. 이 원의 직경 AB를 2:3의 비로 나누는 점 N에서 이 직경에 수직인 활줄 CD를 그었다. CD의 길이를 구하여라.
3. 직3각형의 직각의 정점에서 빗변에 그은 높이가 빗변을 3:7의 비로 나눈다. 그 높이가 50cm라고 할 때 그 직각변의 길이를 구하여라.

4. 직3각형의 세 변이 다음과 같을 때 x의 값을 구하여라. 있을수 있는 경우를 다 생각하여라.

1) 4, 7, $6-x$　　　2) 6, 11, $x+5$

3) 5, 11, $3x+4$　　　4) 3, 10, $6-5x$

5. 그림 4-32는 ㄱ자로 원의 직경을 재는 방법을 보여주고있다. AB=a, MB=b라고 할 때 원의 직경을 a, b에 의하여 표시하여라.

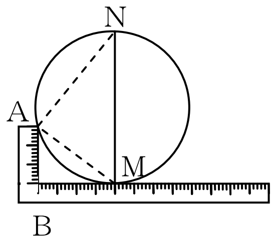


그림 4-32

6. 점 A에서 원 O에 그은 두 접선을 AB, AC(B, C는 접점), AO와 원둘레와의 사귐점을 M, M에서 원 O에 그은 접선이 AB, AC와 사귀는 점을 각각 D, E라고 한다. 원 O의 반경이 15cm, AO=39cm일 때 DE의 길이를 구하여라.

7. 부채형의 반경을 R, 그 활줄을 $2a$, 내접원의 반경을 r라고 하면

$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\mathrm{R}}$이다. 증명하여라.

8. 흔들이의 끈의 길이가 MA=ℓ=1m이다. 추가 올라간 높이 CA=h=10cm일 때 추 B로부터 MA까지의 거리 BC를 구하여라.(그림 4-33)

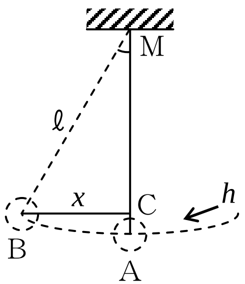


그림 4-33

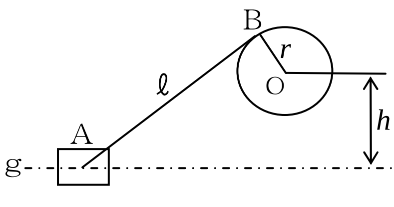


그림 4-34

9. 그림 4-34에서와 같이 나들개가 있다.
휘돌이에서 OB가 축 O의 주위로 돌면 A는 직선 g를 따라 왔다갔다 한다. A가 왔다갔다 하는 거리를 r, ℓ, h를 가지고 표시하여라.

10. △ABC의 외접원에 직경 AE를 그었다. $AB^2+CE^2=AE^2$ 일 때 △ABC는 무슨 3각형인가?

11. 1) △ABC에서 ∠A≠90° 이면 A에서 직선 BC에 그은 수직선의 밑점을 D라고 할 때 AB^2≠BC·BC이다. 왜 그런가?

2) △ABC에서 $AB^2+AC^2=BC^2$ 이면 ∠A=90° 이다. 이것을 귀유법으로 증명하여라.

12. 원 O밖의 점 P로부터 접선 PA, PB를 긋고 활줄 AB의 가운데점 M을 지나는 임의의 활줄 CD를 그으면

1) 네 점 P, C, O, D는 한 원둘레에 놓인다. 증명하여라.(네 점 P, C, O, D 가 한 원둘레에 놓이지 않는 경우가 있을수 있는가?)

2) ∠CPM=∠MPD이다. 증명하여라.

13. 원밖의 한 점에서 원에 접선과 가름선을 그었다.
접선의 길이가 가름선의 원안에 있는 부분과 밖에 있는 부분보다 각각 2cm, 4cm 크다. 가름선의 길이를 구하여라.

14. 사귀는 두 원둘레의 공통활줄 PQ의 연장선의 한 점 A에서 한 원에는 접하며 다른 원과는 사귀는 가름선 ABCD를 긋고 원의 접점을 C, 사귐점을 B, D라고 하면

AB:BC=AC:CD

임을 증명하여라.

15. 일정한 선분 BC를 변으로 하는 등변4각형의 대각선의 사귐점의 자리길을 구하여라.

제5장. 지수식과 로그식

제1절. 지수식

찾기 다음 식에서 지수에 변수가 들어있는 식을 찾아보아라.

1) 2^3, 3^x, 4^{x-1}, 7^8

2) $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+2}$, 3^x, 3^x+3, $7^x+\sqrt{x}$

지수에 변수가 들어있는 식을 **지수식**이라고 부른다.

실례로 3^x+2^{x-2}, $3^{2x}+5^x-9$ 등은 지수식이고 $2+\sqrt{x}$, 3^2+x^2-7은 지수식이 아니다.

지수식에서도 한또래마디를 생각할수 있다.

례 1. 다음 지수식을 정돈하여라.

$$2^{3+x}+3\cdot 2^x+7$$

(풀이) $2^{3+x}+3\cdot 2^x+7=2^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x+7=8\cdot 2^x+3\cdot 2^x+7=$

$$=11\cdot 2^x+7$$

문 제

1. 다음 지수식을 정돈하여라.

1) $2^{x+2}+2^x-10$ 2) $3^{x-3}+3^{x-2}+2^x+2^{x+9}$

2. 다음 지수식을 정돈하여라.

1) $6\cdot 3^{x+2}-5^{x+2}+3^{x+4}-5^{x+2}$

2) $2\cdot 3^{-x}+3^{2-x}+5^{2x+2}-7\cdot 5^{2x-2}$

지수식에서 a^x의 성질을 아는것이 중요하다.

지수식 a^x은 $a>0$, $a \neq 1$일 때만 생각한다.

알아보기 지수식 2^x 에서 $x=-3, -2, 2, 3$ 일 때 식의 값을 구하여라.

식의 값이 령, 부수가 되는 x가 있는가?

> 지수식 a^x 은 임의의 x에 대해서도 그 값이 늘 정수이다.
>
> 즉 $$a^x > 0$$

해보기 지수식 3^x 에서 x가 정수, 부수일 때와 $x=0\left(3^0=1\right)$일 때를 비교해보아라.

> $a>1$일 때 a^x의 값은 $x<0$이면 1보다 작고 $x>0$이면 1보다 크다.
>
> $0<a<1$일 때 a^x의 값은 $x<0$이면 1보다 크고 $x>0$이면 1보다 작다.

알아보기 1) 2^x에서 $x=-2, -1, 1, 2$일 때 그 값을 각각 비교하여라.

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 $x=-2, -1, 1, 2$일 때 그 값을 각각 비교하여라.

$a>1$일 때 $x_1>x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$이다.

$0<a<1$일 때 $x_1>x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$이다.

례 2. 다음 수들을 작은것부터 커가는 차례로 써라.

$$2^{2.3},\ 2^{-0.7},\ 2^{-1.9},\ 2^{1.5},\ 2^{2.6},\ 2^{0}$$

(풀이) 주어진 제곱들의 지수들만 비교해보면

$$-1.9<-0.7<0<1.5<2.3<2.6$$

$2>1$ 이므로 지수들의 크기순서는 곧 주어진 수들의 크기순서로 된다.

따라서 $2^{-1.9}<2^{-0.7}<2^{0}<2^{1.5}<2^{2.3}<2^{2.6}$

문 제

1. 다음 수들가운데서 1보다 큰것과 작은것을 골라내여라.

$$3^{-2.3},\ 0.4^{-0.6},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{1.7},\ 2^{0.03},\ 2^{0},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3.1}$$

2. 다음 수들가운데서 어느것이 큰가?

1) $5^{0.3}$과 $5^{0.4}$　　2) $0.7^{\sqrt{2}}$과 $0.7^{\sqrt{3}}$

3) $\left(\sqrt{3}\right)^{0.75}$과 $\left(\sqrt{3}\right)^{0.8}$　　4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.8}$과 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.9}$

3. 다음 수들을 크기순서로 써라.

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{9}{4}\right)^{0.4},\ \left(\frac{4}{9}\right)^{-0.2},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-0.015}$

2) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{7}{4}\right)^{4.1}$

련습문제

1. 다음 식들가운데서 지수식을 골라내여라.

x^5, 6^x, 1.5^x, $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{-1.2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^x$

2. $-1<a<0$, b가 1보다 큰 홀수이면 b^a, a^b, $a^{\frac{1}{b}}$ 의 크기관계는 (　　)이다.

1) $b^a > a^b > a^{\frac{1}{b}}$　　2) $a^b > b^a > a^{\frac{1}{b}}$

3) $b^a > a^{\frac{1}{b}} > a^b$　　4) $a^b > a^{\frac{1}{b}} > b^a$

3. $0<a<b<1$일 때 a^b, b^a의 크기를 비교하여라.

4. $2^x+5^y=8$ 일 때 $k=2^{x+1}+5^{y+1}$ 이 취할수 있는 값의 범위를 구하여라.

제2절. 로그식

1. 로그와 로그식

$2^3=8$에서 3은 밑수 2의 지수이다.

이때 지수 3을 2를 밑수로 하는 8의 로그수라고 부르고 $3=\log_2 8$로 표시한다.

례 1. $2^2=4$, $2^4=16$에서 지수 2, 4를 각각 2를 밑수로 하는 4, 16의 로그수로 표시하여라.

(풀이) $2=\log_2 4$,　　$4=\log_2 16$

$a>0,\ a\neq 1$ 일 때 $a^x=m$ 을 만족시키는 변수 x의 값을 a를 밑수로 하는 m의 **로그수** 또는 **로그**라고 부르고

$$\log_a m$$

으로 표시한다. 이것을《로그 a, m》이라고 읽는다.

$\log_a m=b$ 일 때 b를 $\log_a m$의 값이라고도 부른다.

진수
↑
$\log_a m$
↓
로그밑수

례 2. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_3 27$ 2) $\log_5 125$

(풀이) 1) $3^x=27$에서 $x=3$이므로 $\log_3 27=3$

2) $5^x=125$에서 $x=3$이므로 $\log_5 125=3$

례 3. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$ 2) $\log_{\frac{1}{2}}16$

(풀이) 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{16}$에서 $x=4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$에서 $x=-4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$

문 제

1. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_2\frac{1}{4}$ 2) $\log_{10}1000$

3) $\log_3 0.(3)$ 4) $\log_{10}0.001$

2. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_9 3$　　　　2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$

3) $\log_{\frac{1}{2}} 32$　　　　4) $\log_{0.01} 1\,000\,000$

> 수 10을 밑수로 하는 로그 $\log_{10} m$을 m의 **상용로그수** 또는 **상용로그**라고 부르고 $\lg m$으로 표시한다.

상용로그의 값을 로그수표로도 구할수 있고 전자수산기로도 구할수 있다.

실례로 lg1.14를 수표에서 구하려면 1.14에서 1.1과 4가 마주치는 곳에서 056 9를 찾아 0.056 9를 쓰면 된다.

n	0		4		1	2	
1.1	→		0569				

문 제

1. 다음 상용로그의 값을 구하여라.

1) lg2　　2) lg4　　3) lg7

2. 다음 상용로그의 값을 구하여라.

1) lg2.32　　2) lg3.37　　3) lg7.2

알아보기 1. lg1은 얼마인가?

2. $\lg\frac{1}{10}$, $\lg\frac{1}{100}$은 얼마인가?

3. lg10, lg100은 얼마인가?

알아보기 정수 A의 표준지수형식이 $A=a\cdot 10^m (1\le a<10,\ m\in Z)$ 이면

$$\lg A=\lg(a\cdot 10^m)=m+\lg a,\ [\lg A]=m,\ \{\lg A\}=\lg a$$

이다. 왜 그런가?

로그의 옹근수부와 소수부

$$A=a\cdot 10^m \Leftrightarrow \lg A=\underset{\substack{\downarrow\\ [\lg A]}}{m}+\underset{\substack{\downarrow\\ \{\lg A\}}}{\lg a}$$

$(1\le a<10,\ m\in Z)$

정수의 상용로그는 이 수의 표준지수에 표준결수의 상용로그를 더한 합과 같다.

상용로그의 옹근수부, 소수부를 각각 **지표**, **가수**라고 부른다.

례 4. $A=1.02\cdot 10^{-3}$이면

$$\lg A=\underline{\lg}(1.02\cdot 10^{-3})=\underbrace{\lg 1.02}_{가수}+\underbrace{(-3)}_{지표}$$

문 제

1. 다음 수의 상용로그의 지표는 얼마인가? 또 가수를 표시하고 식을 써라.

1) 27.6 2) 130.6 3) 3.84 4) 627

5) 72 020 6) 0.1 7) 0.023 8) 0.002 564

2. $A\ge 1$일 때 A의 상용로그의 지표는 A의 옹근수부에 들어있는 수자의 개수와 어떤 관계에 있는가?

$\log_a x$에서

$a>1$일 때

1) $x=1$이면 $\log_a x=0$
2) $0<x<1$이면 $\log_a x<0$
3) $x>1$이면 $\log_a x>0$

$0<a<1$일 때

1) $x=1$이면 $\log_a x=0$
2) $0<x<1$이면 $\log_a x>0$
3) $x>1$이면 $\log_a x<0$이다.

례 5. 다음 상용로그에서 정수인것과 부수인것을 갈라내여라.

$\lg 3.1$, $\lg 0.172$, $\lg 1000$, $\lg 0.99$

(풀이) 3.1, 1 000은 1보다 크므로

$\lg 3.1>0$, $\lg 1000>0$

0.172, 0.99은 1보다 작으므로

$\lg 0.172<0$, $\lg 0.99<0$

문 제

1. 다음 로그에서 정수와 부수를 갈라내여라.

$\log_2 3$, $\log_3 0.9$, $\log_7 0.7$

2. 다음 로그에서 정수와 부수를 갈라내여라.

$\log_{0.1} 10$, $\log_{0.01} 0.1$, $\log_{100} 10$, $\log_{10} 0.1$

해보기 다음 식에서 로그기호안에 변수가 들어있는 식을 골라 내여라.

$\log_3 27$, $\log_9 x$, $\log_4 2x+1$, $\log_2 x+3$

로그기호안에 변수가 들어있는 식을 **로그식**이라고 부른다.

실례로 $\log_2 x$, $\lg(x+2)$, $\log_7(2x+1)+3$ 등은 로그식이다.

로그식에서도 한또래마디를 생각할수 있고 식을 정돈할수 있다.

문 제

1. 다음 로그식의 값을 구하여라.
   1) $x=2$ 일 때 $\log_2 2x+\log_4(8x+2)$
   2) $x=0.01$일 때 $\log_{0.1} x+\log_{0.01} 0.001x-4$
2. 다음 로그식의 값을 구하여라.
   1) $x=1.75$ 일 때 $\lg x+3\lg 2x+7.5$
   2) $x=5.52$ 일 때 $\lg\frac{x}{2}+2\lg\frac{x}{3}+3.2$

로그식을 계산할 때에는 로그의 성질을 자주 쓴다.

2. 로그의 성질

해보기 다음 두 값을 비교하여라.

$2^{\log_2 8}$ 과 8 $4^{\log_4 64}$ 와 64 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 16}$ 과 16

$$a^{\log_a m}=m$$

이 식은 로그의 성질을 밝히는데 많이 쓰인다.

적의 로그

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$

(증명) M>0, N>0일 때

$$a^{\log_a M}=M,\qquad a^{\log_a N}=N$$

한편 지수법칙에 의하여

$$a^{\log_a M+\log_a N}=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=M\cdot N$$

따라서 로그의 정의에 의하여

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$

진수의 인수가 3개이상일 때에도 우와 같은 성질을 가진다.
일반적으로 $M_1, M_2,\cdots, M_n>0$일 때

$$\log_a(M_1 M_2\cdots M_n)=\log_a M_1+\log_a M_2+\cdots+\log_a M_n$$

례 1. $\log_2(32\cdot 64)=\log_2 32+\log_2 64=5+6=11$

문 제

1. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_2(8\cdot 32)$　　2) $\log_4(64\cdot 4\cdot 4^{-2})$

3) $\log_a a^3$　　4) $\log_3(27\cdot 3\sqrt{3})$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_5 8+\log_5 0.25+\log_5 2.5$

2) $\log_{10}2+\log_{10}\sqrt{3}+\log_{10}\sqrt{\frac{1}{6}}$

해보기 다음 계산과정을 보고 상의 로그가 무엇과 같은가를 말하여라.

$$\log_2 \frac{64}{16} = \log_2 \frac{2^6}{2^4} = \log_2 2^2 = 2$$
$$\log_2 64 - \log_2 16 = 6 - 4 = 2$$

이므로 $\log_2 \frac{64}{16} = \log_2 64 - \log_2 16$

상의 로그
M, N > 0일 때 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(증명) $a^{\log_a M - \log_a N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = \frac{M}{N}$

이므로 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

례 2. 1) $\log_{10} \frac{1000}{100} = \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = 3 - 2 = 1$

2) $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$

문 제

1. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_5 \frac{625}{125}$ 2) $\log_3 \frac{9}{243}$ 3) $\log_{10} \frac{0.01}{100}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_{10} 3 - \log_{10} 0.3$ 2) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$

3) $\log_5 2 + \log_5 20 - \log_5 8$

3. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

4. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 임을 알고 다음 로그를 구하여라.

1) $\log_{10} 6$　　2) $\log_{10} 5$　　3) $\log_{10} 60$

4) $\log_{10} 1.5$　　5) $\log_{10} \frac{1}{15}$　　6) $\log_{10} 0.06$

찾기 다음 계산과정을 보고 제곱의 로그가 무엇과 같은가를 말하여라.

$$\log_a M^3 = \log_a (M \cdot M \cdot M)$$
$$= \log_a M + \log_a M + \log_a M$$
$$= 3\log_a M$$

> **제곱의 로그**
>
> M>0 이고 k가 실수일 때
>
> $$\log_a M^k = k \log_a M$$

례 3. 1) $\log_{10} 10^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_{10} 10 = \frac{1}{3}$

2) $\log_2 \sqrt[4]{8^3} = \log_2 8^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\log_2 8 = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$

문 제

1. 공식 $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a M}{n}$ 을 증명하여라.

2. 다음 값을 구하여라.

1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$　　2) $\log_3 \sqrt{3\sqrt{3}}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\log_3 \frac{4}{3} - 2\log_3 \sqrt{12}$ 2) $2\log_{10} \frac{5}{2} + \log_{10} 18 - \log_{10} \frac{9}{8}$

3) $\log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2}\log_{10} 0.6$

로그밑수변환공식
$c>0,\ \ c\neq 1$일 때
$\log_a \mathrm{M} = \frac{\log_c \mathrm{M}}{\log_c a}$

(증명) $\log_a \mathrm{M} \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a \mathrm{M}} = \log_c \mathrm{M}$

이고 $\log_c a \neq 0$이므로

$$\log_a \mathrm{M} = \frac{\log_c \mathrm{M}}{\log_c a}$$

례 4. $\log_4 8$을 계산하여라.

(풀이) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$ $(c=2)$

례 5. lg173을 전자수산기로 구하여라.

(풀이) 173 [log] ⟶ 2.238 046 1

문 제

1. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 2) $\log_{a^n} \mathrm{M} = \frac{\log_a \mathrm{M}}{n}$

3) $\log_{\sqrt[n]{a}} \mathrm{M} = n\log_a \mathrm{M}$

2. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_{100} 10$ 2) $4\log_8 2$

3) $\log_{25} 125$ 4) $\log_{64} 32$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$

2) $\left(\log_2 3 + \log_4 9 + \cdots + \log_{2^5} 3^5\right)\log_9 \sqrt[5]{32}$

4. 다음것을 구하여라.

1) $\log_{12} 2 = a$ 일 때 $\log_6 64$

2) $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$ 일 때 $\log_{abc} x$

련습문제

1. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_8 32$ 2) $\log_{81} 3\sqrt{3}$ 3) $\log_{64} \sqrt[3]{2}$

4) $\log_3 \sqrt[5]{243\sqrt{9}}$ 5) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$ 6) $\log_4 \frac{2\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $5^{-3\log_5 10}$ 2) $10^{2-\frac{1}{2}\log_{10} 0.001}$ 3) $\left(\sqrt{8}\right)^{\log_2 25}$

3. 다음것을 구하여라.

1) $x = 2a^3bc^2$ 일 때 $\log_2 x$

2) $y = \frac{ab^3c}{2\sqrt{c}}$ 일 때 $\log_{10} y$

3) $z = 2\sqrt[3]{\frac{ab\sqrt{c}}{m^2n\sqrt{p}}}$ 일 때 $\log_{10} z$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{10} 49 - \log_{10}\frac{7}{20}$

2) $4\log_{10}\sqrt{150} - \log_{10} 54 + \log_{10} 24$

5. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_{\sqrt{2}} 16\sqrt[3]{2} + \log_{\sqrt{8}} 32\sqrt{2}$　　　　2) $64^{1-2\log_{16}12}$

3) $\dfrac{4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 6}}{100^{\frac{1}{2}-\log_{10}\sqrt[4]{5}}}$

6. 다음 같기식이 옳은가? 그 리유를 설명하여라.

1) $\log_{10}(8+2) = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$

2) $\log_{10}(8-2) = \log_{10} 8 - \log_{10} 2$

7. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\frac{\log_a \mathrm{M}_1}{\log_a \mathrm{M}_2} = \frac{\log_b \mathrm{M}_1}{\log_b \mathrm{M}_2}$$

이 같기식은 로그의 어떤 성질을 말해주고있는가?

8. 지수와 로그에 관한 다음 공식을 증명하여라.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

9. 3^{50} 은 몇자리수인가?($\lg 3 = 0.4771$)

10. 로그의 지표가 3인 수는 어떤 범위의 수인가? 그러한 자연수는 모두 몇개인가?

11. x가 어떤 옹근수일 때 1.08^x 의 옹근수부가 다섯자리수로 되는가?

($\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$)

12. 생산을 높은 속도로 장성시킬데 대하여 주신 경애하는 수령 **김일성**대원수님의 유훈과 위대한 령도자 **김정일**원수님의 말씀을 높이 받들고 어느 한 공장에서는 2004년부터 2010년까지의 기간에 생산을 해마다 평균 20％씩 증가시켰다. 이 기간에 생산이 몇배로 증가하였겠는가?

13. 피스톤이 한번 움직일 때마다 용기안의 공기가 $\frac{1}{8}$씩 빠지는 진공뽐프가 있다. 이 진공뽐프의 피스톤을 50번 움직이면 용기안의 압력은 얼마로 되겠는가?
용기안의 처음압력은 1×10^5 Pa이다.

복습문제

1. $0<a<b<1$일 때 다음 안같기식가운데서 옳은것을 찾아보아라.

1) $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　　2) $(1+a)^a>(1+b)^b$

3) $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　4) $(1-a)^a>(1-b)^b$

2. $m>n>0$, $a\neq1$일 때

$$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$$

임을 증명하여라.

3. $x_2>x_1>0$, $a\neq1$, $a>0$일 때 다음 식을 증명하여라.

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}>a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

4. $\log_{10}3=a$, $\log_{10}5=b$ 라고 할 때 다음 식을 a와 b에 의하여 표시하여라.

1) $\log_{10}15$　　2) $\log_{10}45$

5. $a>b>0$일 때 다음 식을 증명하여라.

$$\frac{\lg a+\lg b}{2}<\lg\frac{a+b}{2}$$

6. 다음 갈기식이 옳은가? 왜 그런가?

1) $\log(8+2)=\log8+\lg2$　　2) $\log(8-2)=\log8-\lg2$

3) $\log_4(4-2)=\dfrac{\log_4 4}{\log_4 2}$　　4) $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 8}=\log_2 4-\log_2 8$

7. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\log_3 9}$　　2) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{\log_{0.3} 9}$　　3) $(0.2)^{-\log_5 2}$

4) $(0.04)^{\log_5 10}$　　5) $\left(\sqrt{7}\right)^{-1+2\log_7 5}$　　6) $64^{0.5\log_2 10}$

8. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $10^{2\lg 3+\frac{1}{3}\lg 8}$　　2) $\dfrac{7^{1-\frac{3}{4}\log_7 16}}{49^{2\log_7 2}}$　　3) $\left(\sqrt{2}\right)^{2+\log_2 9}+\left(\sqrt{3}\right)^{2-\log_{\sqrt{3}} 2}$

4) $36^{1-\log_6 3}+25^{-\log_5 2}+\sqrt{10^{2-2\log_{10} 5}}$

9. 다음것을 비교하여라.

1) $\log_2 5$와 $\log_3 5$　　2) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{0.07}$과 $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{1}{25}}$

3) $\log_2 3$과 $\log_3 2$　　4) $\log_3 75$와 $\log_2 11$

10. 임의의 정수 a, M에 대하여 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$\frac{1}{\log_a \mathrm{M}}+\frac{1}{\log_{a^2} \mathrm{M}}+\frac{1}{\log_{a^3} \mathrm{M}}+\frac{1}{\log_{a^4} \mathrm{M}}=10\log_{\mathrm{M}} a$$

11. 해발높이가 h인 곳의 기압 P(mm수은기둥)는 대략 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_0 \cdot 10^{-\frac{h}{18000}}$$

여기서 P_0은 바다면에서의 기압 즉 $\mathrm{P}_0=1\times 10^5\,\mathrm{Pa}$이다.

1) 높이가 2 750m인 백두산에서의 기압을 계산하여라.

2) 얼마의 높이에서 기압이 $\frac{\mathrm{P}_0}{2}$으로 되겠는가?

제6장. 삼각식

제1절. 삼각비들사이의 관계

1. 삼각비

시작변이 시계바늘이 도는 방향과 반대방향으로 돌아 생긴 각을 **정각**, 같은 방향으로 돌아 생긴 각을 **부각**이라고 부른다.

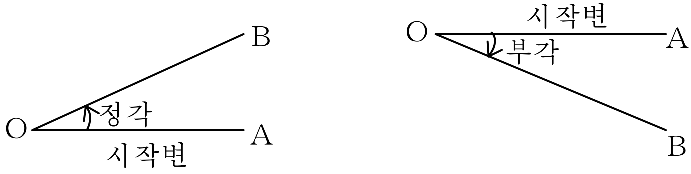


그림 6-1

정각의 크기는 정수로, 부각의 크기는 부수로 표시한다.

알아보기 그림 6-2에서와 같이 자리표평면에 원 O(r)가 그려져있다.
점 M이 1사분구에 있을 때 ($0° < \theta < 90°$) 삼각비 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$의 이름을 불러보아라.

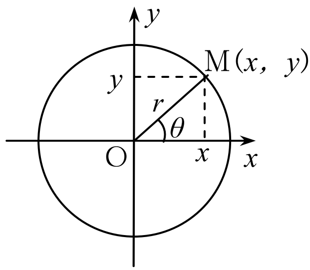


그림 6-2

$\theta \geq 90°$인 경우도 삼각비를 생각한다.

자리표평면에 원 O(r)가 있다.
원둘레의 점 M(x, y)을 생각하자.
반경 OM이 x축으로부터 $120°$

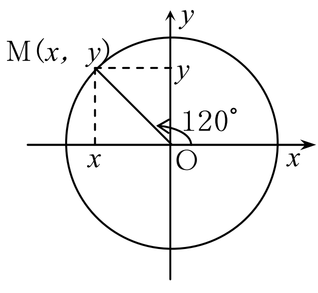


그림 6-3

돌았을 때 $\frac{y}{r}$를 120°의 시누스라고 부르고 sin120°로 표시한다.

일반적으로 $0° \le \theta < 360°$ $(-360° < \theta \le 0°)$인 각 θ에 대하여 삼각비를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

다음 $\frac{x}{y}$를 $\cot\theta$로 표시하고 **《코탕겐스 시타》**라고 읽는다.

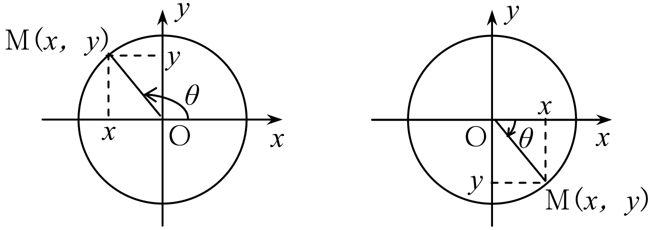


그림 6-4

$r > 0$이므로 각 θ의 삼각비의 부호는 x, y의 부호에 따른다.

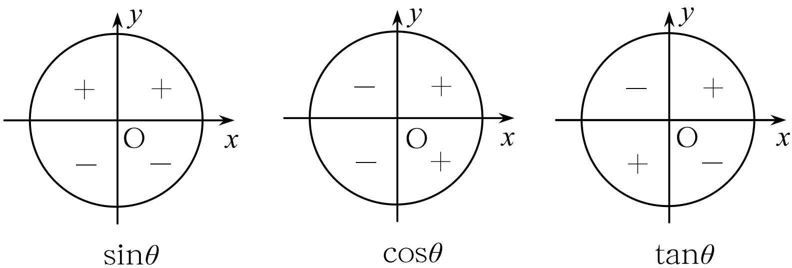


그림 6-5

$360°n + \theta$와 θ의 삼각비는 같은것으로 본다.

례 1. 반경 $r = 2$인 원둘레에서 $\theta = -30°$인 점은 $M(\sqrt{3},\ -1)$ 이므로

$$\sin(-30°)=-\frac{1}{2}, \qquad \cos(-30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cot(-30°)=-\sqrt{3}$$

례 2. $\sin 830°$, $\cos 830°$, $\tan 830°$, $\cot 830°$는 정수인가 부수인가?

(풀이) $830°=110°+2\cdot 360°$이므로 2사분구의 각이다.

따라서 $\sin 830°>0$, $\cos 830°<0$

$\tan 830°<0$, $\cot 830°<0$

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 구하여라.

1) $\sin 0°$ 2) $\sin 180°$ 3) $\cos 90°$ 4) $\cos 180°$

2. 다음 삼각비의 부호를 말하여라.

1) $\sin 125°$ 2) $\cos 210°$ 3) $\tan 210°$

4) $\cos 135°$ 5) $\tan 290°$ 6) $\sin(-15°)$

7) $\tan(-120°)$ 8) $\cot(-300°)$

3. $0°<\alpha<30°$이면 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$의 크기관계는 (   )이다.

1) $\sin\alpha<\cos\alpha<\tan\alpha<\cot\alpha$ 2) $\sin\alpha<\tan\alpha<\cos\alpha<\cot\alpha$

3) $\tan\alpha<\sin\alpha<\cos\alpha<\cot\alpha$ 4) 우의 답이 모두 틀린다.

2. 전화공식

알아보기 OM을 x축에 관하여 대칭이동하여 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $-\theta$에 대한 삼각비의 값들을 말하여라.

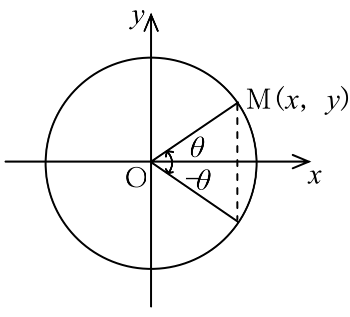


그림 6-6

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta \qquad \cot(-\theta)=-\cot\theta$$

례 1. $\sin(-15°)=-\sin15°$, $\cos(-120°)=\cos120°$

알아보기 OM을 y축에 관하여 대칭이동시켜 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $180°-\theta$에 대한 삼각비의 값을 말하여라.

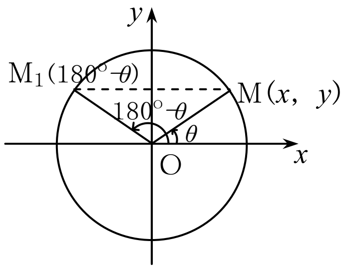


그림 6-7

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta \qquad \cot(180°-\theta)=-\cot\theta$$

례 2. $\sin165°=\sin(180°-15°)=\sin15°$

알아보기 $180°+\theta=180°-(-\theta)$에 대한 삼각비의 값들을 어떻게 구할수 있는가?

$$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(180°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(180°+\theta)=\cot\theta$$

례 3. $\cos195°=\cos(180°+15°)=-\cos15°$

문 제

1. 다음 부각의 삼각비의 값을 정각의 삼각비의 값으로 고쳐라.
$\sin(-126°)$, $\cos(-32°)$, $\tan(-260°)$, $\cot(-72°)$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sin^2(-30°)$　　2) $2\sin(-60°)\cos(-60°)$

3) $1+\sin^2(-90°)$　　4) $1-\tan(-30°)\cot(-30°)$

3. 다음 삼각비들을 뾰족각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

1) $\cos 97°$　　2) $\tan 132°$　　3) $\cot(-126°)$

4. 다음 삼각비값들을 45°보다 작은 각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

1) $\cos 195°$　　2) $\sin(-205°)$

3) $\tan 199°$　　4) $\cot 216°$

알아보기 OM을 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동시켜 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $90°-\theta$에 대한 삼각비의 값을 말하여라. 그리고 $90°+\theta$에 대한 삼각비의 값은 어떻게 되겠는가?

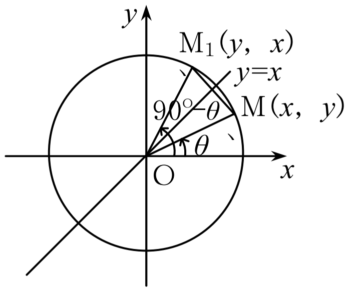


그림 6—8

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$$
$$\sin(90°+\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\cot\theta \qquad \cot(90°-\theta)=\tan\theta$$
$$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta \qquad \cot(90°+\theta)=-\tan\theta$$

례 4. $\sin 65°=\sin(90°-25°)=\cos 25°$

$\sin 95°=\sin(90°+5°)=\cos 5°$

$\cos 72°=\cos(90°-18°)=\sin 18°$

$\cos 105°=\cos(90°+15°)=-\sin 15°$

$\tan 81°=\tan(90°-9°)=\cot 9°$

$\cot 55°=\cot(90°-35°)=\tan 35°$

$\cot 127°=\cot(90°+37°)=-\tan 37°$

알아보기 $\sin(270° + \theta) = \sin[180° + (90° + \theta)]$

$= -\sin(90° + \theta)$

$= -\cos\theta$

$270° + \theta$에 대한 다른 삼각비의 값들을 알아보아라.

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(270° - \theta) = \tan\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

례 5. $\sin 255° = \sin(270° - 15°) = -\cos 15°$

$\sin 280° = \sin(270° + 10°) = -\cos 10°$

$\cos 210° = \cos(270° - 60°) = -\sin 60°$

$\cos 316° = \cos(270° + 46°) = \sin 46°$

$\tan 235° = \tan(270° - 35°) = \cot 35°$

$\tan 297° = \tan(270° + 27°) = -\cot 27°$

$\cot 250° = \cot(270° - 20°) = \tan 20°$

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 뾰족각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

1) $\sin 150°$ 2) $\cos 129°$ 3) $\tan 109°$ 4) $\cot 136°$
5) $\sin 292°$ 6) $\cos 255°$ 7) $\tan 302°$ 8) $\cot 267°$

2. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sin(90° - \alpha)\cos(180° - \alpha)$ 2) $\tan(270° + \alpha)\cot(360° - \alpha)$

3) $\sin(180° + \alpha) - \cos(270° - \alpha)$

4) $[3m\cos(-60°)]^3 - 4[m\cot(-30°)]^3 + 12\sin(-30°)$

5) $\dfrac{\sin(180° - \alpha)\cot(90° - \alpha)\cos(360° - \alpha)}{\tan(180° + \alpha)\tan(90° + \alpha)\sin(-\alpha)}$

3. 다음것을 증명하여라.

1) $\cos 40° + \cos 100° + \cos 140° + \sin 10° = 0$

2) $\cot A + \tan(90° + A) + \tan(180° + A) + \cot(270° + A) = 0$

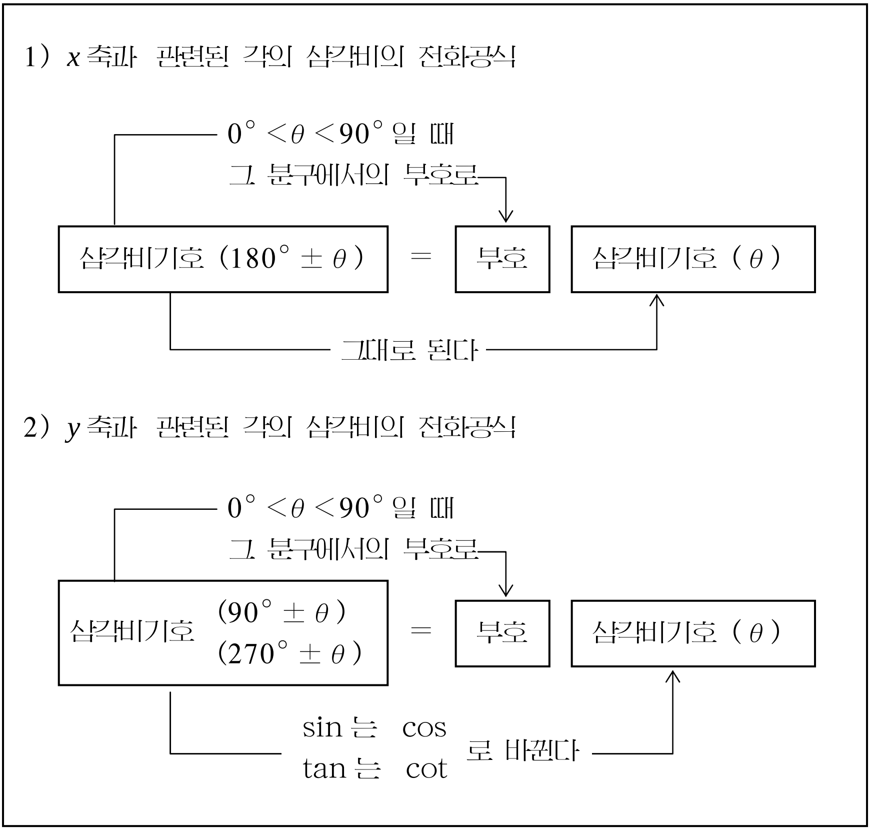
4. 다음 같기식은 옳은 같기식이다. 그 리유를 밝히여라.

1) $\cos 160° = -\cos 20°$ 2) $\sin 235° = -\cos 35°$

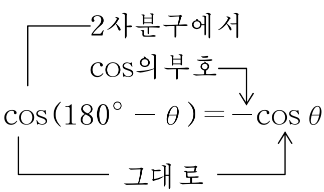
3) $\tan 116° = -\cot 26°$ 4) $\cot 300° = -\tan 30°$

많은 전화공식들을 다음과 같이 기억하면 쓰기가 편리하다.

공식들의 기억에서는 두가지 즉 오른변에서 각 θ에 관한 삼각비의 부호와 기호를 정하는 규칙성을 알면 쉽다.



례 6.



례 7.

4사분구에서 cot의부호 → $-$

$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

바뀐다 (cot → tan)

문 제

1. 다음 삼각비의 전화공식을 쓰고 부호와 기호를 설명하여라.

1) $\sin(180° - \theta)$　　2) $\tan(180° + \theta)$　　3) $\cos(90° + \theta)$

4) $\sin(90° + \theta)$　　5) $\tan(270° - \theta)$

2. 다음 식의 부호를 말해보아라.

1) $\sin 110°$　　2) $\cos 100°$　　3) $\tan 135°$　　4) $\cot 120°$

3. 기본삼각늘갈기식

해보기 삼각비의 정의를 써서 다음 갈기식을 증명하여라.

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

기본삼각늘갈기식

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$　　4) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

례 1. $\sin\theta = -0.6$을 알고 θ에 대한 다른 삼각비의 값을 구하여라.

(풀이) $\sin\theta = -0.6 < 0$ 이므로 3사분구나 4사분구의 각이다.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (-0.6)^2 = 0.64$

$\cos\theta = \pm 0.8$

즉 $180° < \theta < 270°$ 이면 $\cos\theta = -0.8$

$270° < \theta < 360°$ 이면 $\cos\theta = 0.8$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-0.6}{\mp 0.8} = \pm\frac{3}{4} = \pm 0.75$$

즉 $180° < \theta < 270°$ 이면 $\tan\theta = 0.75$
$270° < \theta < 360°$ 이면 $\tan\theta = -0.75$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\pm\frac{3}{4}} = \pm\frac{4}{3}$$

즉 $180° < \theta < 270°$ 이면 $\cot\theta = \frac{4}{3}$

$270° < \theta < 360°$ 이면 $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

례 2. 같기식 $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 을 증명하여라.

(증명) (왼변) $= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$

$= \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} =$ (오른변)

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 알고 다른 삼각비의 값을 구하여라.

1) $\cos\theta = \frac{3}{5}$　　2) $\tan\theta = -1$　　3) $\cot\theta = \frac{1}{3}$

4) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $(270° < \alpha < 360°)$

2. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

2) $\frac{1}{1+\sin^2\alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}} = 1$

3) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$ 4) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

련습문제

1. 다음의 삼각비의 값을 구하여라.

1) $\theta=210°$, $225°$, $330°$ 일 때

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

2) $\theta=-30°$, $-60°$, $-225°$ 일 때

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$

2. 다음 식을 계산하여라.

1) $(2\sin 135°)^2$ 2) $3\cos 210°-5$

3) $\dfrac{\sin 120°}{\tan^3 135°}$ 4) $2\cot 225°-\dfrac{1}{\sin 90°}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ 2) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-1}$ 3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cot^2\alpha$

4) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$ 5) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

6) $(1-\tan^4\alpha)\cos^2\alpha+\tan^2\alpha$

4. 다음것을 구하여라.

1) $\tan\theta=\sqrt{15}$, $180°<\theta<270°$ 일 때 $\cos(180°-\theta)$

2) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $90°<\alpha<180°$ 일 때 $\sin(270°-\alpha)$

5. 다음 삼각비의 값을 알고 다른 삼각비의 값을 구하여라.

1) $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$, $180°<\alpha<270°$

2) $\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$, $90°<\alpha<180°$

6. 다음 식의 값을 구하여라.

$\cos\alpha=0.6$, $270°<\alpha<360°$ 일 때 $\left(1-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$

7. $\tan\alpha+\cot\alpha=a$ 일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$　　2) $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$

8. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$ 일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\tan\alpha+\cot\alpha$　　2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$

9. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $$\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=-2$$

2) $$\frac{\cos^4\beta}{\cot^4\beta}+\frac{1}{\left(\frac{1}{\sin\beta}\tan\beta\right)^4}+2\sin^2\beta\cos^2\beta=1$$

10. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sin^2(270^\circ-\alpha)+\sin^2(360^\circ-\alpha)$

2) $\tan(90^\circ+\alpha)\cdot\cot(180^\circ-\alpha)-\cot(\alpha-180^\circ)\cdot\sin(90^\circ-\alpha)$

제2절. 더하기공식

1. 합과 차의 코시누스

알아보기 1) 다음 같기식이 옳은가?

$\cos(30^\circ+60^\circ)=\cos30^\circ+\cos60^\circ$

$\sin(30^\circ+60^\circ)=\sin30^\circ+\sin60^\circ$

$\tan(45^\circ+60^\circ)=\tan45^\circ+\tan60^\circ$

2) 단위원둘레에서 $\angle xOA=\alpha$, $\angle xOB=\beta$ 로 되게 점 A, B를 잡자. 그러면 두 점의 자리표는 다음과 같다.

$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$,

$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$

이때 다음 같기식이 옳은가?

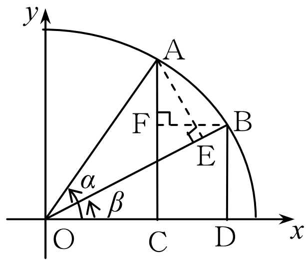


그림 6-9

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$AB^2=[1-\cos(\alpha-\beta)]^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(증명) $AB^2=AF^2+FB^2=(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$

$$=2[1-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)]$$

$$AB^2=AE^2+EB^2=\sin^2(\alpha-\beta)+[1-\cos(\alpha-\beta)]^2$$
$$=2[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

따라서 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

β를 $-\beta$로 바꾸면

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

례 1. $\sin\alpha=\frac{8}{17}(0°<\alpha<90°)$, $\sin\beta=-\frac{7}{25}(180°<\beta<270°)$ 일 때 $\cos(\alpha-\beta)$를 계산하여라.

(풀이) $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$, $\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=-\frac{24}{25}$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)+\frac{8}{17}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)=-\frac{416}{425}$$

례 2. $\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

문 제

1. 다음 각의 코시누스값을 구하여라.

1) $15°$ 2) $105°$ 3) $165°$ 4) $255°$ 5) $195°$

2. 다음 식을 계산하여라.

1) $\cos(\alpha - 30°) - \cos(\alpha + 120°)$

2) $\cos(\alpha - 150°) + \cos(\alpha - 300°)$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\cos 50° \cdot \cos 40° - \sin 50° \cdot \sin 40°$

2) $\cos 173° \cdot \cos 128° + \sin 173° \cdot \sin 128°$

4. $\cos\alpha = \frac{5}{13}\left(270° < \alpha < 360°\right)$일 때 $\cos\left(30° + \alpha\right)$를 계산하여라.

2. 합과 차의 시누스

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(증명) $\sin(\alpha - \beta) = \cos(90° - \alpha + \beta)$

$$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta - \sin(90° - \alpha)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

즉 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

여기서 β를 $-\beta$로 바꾸면

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

례. 1) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

2) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$$

문 제

1. 다음 각의 시누스를 계산하여라.

1) 105°　　2) 135°　　3) 255°　　4) 195°

2. $\sin\alpha = \frac{3}{5}(0° < \alpha < 90°)$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$ $(0° < \beta < 90°)$ 일 때 다음 식을 계산하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)$　　2) $\sin(\alpha-\beta)$

3. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ($90° < \alpha < 180°$), $\cos\beta = \frac{4}{5}$ ($180° < \beta < 270°$)일 때 다음 식을 계산하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)$　　2) $\sin(\alpha-\beta)$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sin 63° \cdot \cos 27° + \cos 63° \cdot \sin 27°$

2) $\sin 125° \cdot \cos 35° - \cos 125° \cdot \sin 35°$

5. 다음 식을 계산하여라.

1) $\sin(\alpha - 45°) + \cos(\alpha + 45°) + \sin(135° + \alpha) + \cos(\alpha - 135°)$

2) $\sin\alpha\cos(\alpha-\beta) + \cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

3) $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

3. 합과 차의 탕겐스

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

(증명) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

($\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$일 때)

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

β를 $-\beta$로 바꾸면 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

례. 1) $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

2) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

문 제

1. 다음 각의 탕겐스값을 구하여라.

1) 150°　　2) 105°

2. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha)$　　2) $\tan(45^\circ+\alpha)=\cot(45^\circ-\alpha)$

3) $\tan(45^\circ-\alpha)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\dfrac{\tan 13^\circ+\tan 32^\circ}{1-\tan 13^\circ\cdot\tan 32^\circ}$　　2) $\dfrac{\tan 100^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 100^\circ\cdot\tan 40^\circ}$

련습문제

1. 다음 셈식의 값을 구하여라.

1) $\sin 64^\circ \cdot \cos 86^\circ + \cos 64^\circ \cdot \sin 86^\circ$

2) $\cos 32^\circ \cdot \cos 103^\circ - \sin 32^\circ \cdot \sin 103^\circ$

3) $\dfrac{\tan 38^\circ + \tan 82^\circ}{1 - \tan 38^\circ \cdot \tan 82^\circ}$

4) $\dfrac{\tan 13^\circ - \tan 148^\circ}{1 + \tan 13^\circ \cdot \tan 148^\circ}$

2. α, β 가 다 뾰족각이고 $\sin\alpha = \dfrac{13}{14}$, $\sin\beta = \dfrac{11}{14}$ 일 때

1) $\sin(\alpha+\beta)$ 의 값은 얼마인가?

2) $\alpha+\beta$ 는 몇도각인가?

3. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$, $\cot\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(270^\circ < \beta < 360^\circ)$ 일 때

다음 식을 계산하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)$　　2) $\cos(\alpha-\beta)$

3) $\tan(\alpha-\beta)$　　4) $\cot(\alpha+\beta)$

4. 다음 식을 계산하여라.

1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha) - \cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha) + \cos(45^\circ+\alpha)}$

2) $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin(\alpha+150^\circ)} + \dfrac{1}{\sin(\alpha+210^\circ)}$

5. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sin(\alpha+60^\circ) + \sin(\alpha-60^\circ)$　　2) $\cos(30^\circ+\alpha) + \cos(30^\circ-\alpha)$

3) $\sin(\alpha+60^\circ) - \sin(\alpha-60^\circ)$　　4) $\cos(30^\circ+\alpha) - \cos(30^\circ-\alpha)$

6. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$　　2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}$

3) $\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$　　4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta) + 2\cos\alpha \cdot \sin\beta}{2\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos(\alpha-\beta)}$

7. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

2) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

3) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

4) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

8. 합과 차의 탕겐스공식을 이끌어내던 방법으로 다음 공식을 이끌어내여보아라.

1) $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$ 2) $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

제3절. 삼각식의 변형

1. 배각과 반각의 공식

해보기 더하기정리를 써서 다음 식을 계산하여라.

$$\sin(\alpha+\alpha),\qquad \cos(\alpha+\alpha),\qquad \tan(\alpha+\alpha)$$

배각의 공식

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

례 1. $\sin\alpha=0.6\ (0°<\alpha<90°)$ 일 때 $\sin 2\alpha$ 를 구하여라.

(풀이) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(0.6)^2}=0.8$

따라서 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times0.6\times0.8=0.96$

알아보기 1. 다음것을 보고 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 를 구하여라.

$$1+\cos\alpha = 1+\cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

2. 다음 같기식이 옳은가?

1) $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

2) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$

3) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$

반각의 공식

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ \left(=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$$

겹부호는 각각 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$ 의 부호에 따라 정해진다는 것을 표시한것이다.

례 2. $\sin 15° = \sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

례 3. $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ 일 때 $\sin\alpha$ 를 구하여라.

(풀이) $\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

문 제

1. $\sin\alpha=0.8\ (90^\circ<\alpha<180^\circ)$ 일 때 $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\tan2\alpha$ 를 구하여라.
2. 다음 식을 증명하여라.

   1) $\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$　　2) $\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
3. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin2\alpha}$　　2) $\frac{\tan(270^\circ+\alpha)-\cot(90^\circ+\alpha)}{\cot(270^\circ+\alpha)+\tan(90^\circ+\alpha)}$
4. $\tan\frac{\alpha}{2}=t$를 알고 다음 식을 증명하여라.

   1) $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　　2) $\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$
5. $\sin3\alpha$ 를 $\sin\alpha$ 로 표시하여라.

2. 적을 합으로, 합을 적으로 고치기

알아보기 다음 식이 옳은가?

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$
2) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$
3) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$
4) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

례 1. $\sin 3\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta) = \sin 2\theta\cos 2\theta + \sin\theta\cos\theta$

$$= 2\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \sin\theta\cos\theta$$

$$= 3\sin\theta\cos^3\theta - \sin^3\theta\cos\theta$$

해보기 1. 련립방정식

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x \\ \alpha-\beta = y \end{cases}$$

을 풀어라.

2. 우의 공식에서 α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$를 x, y로 표시하여라.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

례 2. $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ = 2\cos\frac{15^\circ + 75^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ - 75^\circ}{2}$

$$= 2\cos 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

례 3. 다음 식을 증명하여라.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45^\circ)$$

(풀이) $\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) + \cos\alpha$

$$= 2\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha - \alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{2\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)$$

$$= \sqrt{2}\cos(\alpha - 45^\circ)$$

문 제

1. 다음 식을 합으로 고쳐라.

1) $2\cos 4\theta \cos\theta$　　2) $4\sin 3\theta \sin 6\theta$

2. 다음 식을 적으로 고쳐라.

1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$　　2) $\cos 48^\circ + \cos 12^\circ$

3) $\sin 50^\circ - \sin 3^\circ$　　4) $\cos 10^\circ - \cos 20^\circ$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$　　2) $\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$

3) $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$　　4) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$

4. 다음의 적을 합으로 표시하여 그 값이 얼마인가를 말하여라.

1) $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$　　2) $\sin 165^\circ \cdot \sin 105^\circ$

3) $\sin 195^\circ \cdot \cos 255^\circ$

련습문제

1. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ $(0° < \alpha < 90°)$ 일 때 $\cos 2\alpha$ 의 값을 구하여라.

2. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ 일 때 $\sin 2\alpha$ 를 구하여라.

3. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\cot\alpha = \frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$　　2) $1-\cot^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

4. $\cos 3\alpha$ 를 $\cos\alpha$ 로 표시하여라.

5. $\sin^3\alpha$ 를 배각의 삼각비로 표시하여라.

6. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $2\sin^2 3\alpha - 1 + \cos 6\alpha$　　2) $\cos 3\alpha - 2\cos^2 1.5\alpha$

3) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$　　4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$

7. 다음 식을 적의 모양으로 표시하여라.

1) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$　　2) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

3) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$

4) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$

8. $\frac{\sin 7° + \cos 15° \sin 8°}{\cos 7° - \sin 15° \sin 8°}$ 의 값은 (　　)이다.

1) $2+\sqrt{3}$　　2) $2-\sqrt{3}$

3) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

9. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$ 이고 $0° < \alpha < 180°$ 일 때 $\tan\alpha =$ (　　)이다.

1) $\frac{4}{3}$　　2) $\frac{3}{4}$　　3) $-\frac{3}{4}$　　4) $-\frac{4}{3}$ 또는 $-\frac{3}{4}$

10. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\tan\alpha = 0.2$ 일 때 $\dfrac{87}{3+4\cos 2\alpha}$ 의 값

2) $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{7}{5}$ 일 때 $\sin\alpha$ 의 값

복습문제

1. 다음 각에 대한 삼각비의 값들가운데서 정수인것은 어느것이고 부수인것은 어느것인가?

1) $130°$　　2) $279°$　　3) $-520°$

2. 다음 함수값들을 $45°$ 보다 작은 각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

1) $\sin 190°$　　2) $\cos 115°$　　3) $\tan 295°$

3. $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ $(90^o < \alpha < 270^o)$ 일 때 나머지 삼각비의 값을 구하여라.

4. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha$

2) $\sin\alpha(1+\tan\alpha) + \cos\alpha(1+\cot\alpha)$

3) $\dfrac{\cos^4 3\alpha - \sin^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha} + \tan^2\alpha$

4) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} + \cot^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta$

5. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha}$　　2) $(1-\tan^4\alpha)\cot^2\alpha + \tan^2\alpha$

6. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\tan 170^o \cot 190^\circ \cos 350^\circ}{\tan 190^\circ \tan 100^\circ \sin(-10)^\circ}$

2) $\dfrac{\cos(\alpha-180°)\cot(90°+\alpha)\sin(360°-\alpha)}{\sin(180°+\alpha)\cot(270°-\alpha)}$

7. $\sin\alpha=1$ 일 때 $\cos\alpha+\cot\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}=1$ 이라는것을 증명하여라.

8. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

2) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}=\cos\alpha\cos\beta$

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}=0$

9. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

2) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-$
$-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)$

10. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha$

2) $\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-2\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos\alpha\cos\beta=\sin^2\alpha$

11. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

12. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\tan(30^\circ+\alpha)\tan(30^\circ-\alpha)=\dfrac{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

2) $1-3\tan^2\alpha=\dfrac{4\sin(30°+\alpha)\sin(30°-\alpha)}{\cos^2\alpha}$

13. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\sin^4 3\alpha-\cos^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha}+\tan^2\alpha$　　2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}$

14. $\tan\alpha = 3\ (0° < \alpha < 90°)$ 일 때 $\sin 4\alpha$ 를 구하여라.

15. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \sin 2\alpha$

2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\tan\dfrac{\alpha}{2}} = 1+\cos\alpha$

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cot^2\alpha - \tan^2\alpha} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

4) $\dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \tan^6\alpha$

16. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \tan\alpha$

2) $\dfrac{2\sin^2(45° - \alpha)}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha} - \tan 2\alpha$

3) $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 2\cos\dfrac{3}{2}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$

4) $1+\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$

상 식

세계에서 처음으로 삼각계산기를 발명한 우리 나라의 수학자 남병길

우리 나라의 수학자, 천문학자인 남병길(1820-1869)은 일찍부터 형 남병철의 도움을 받으면서 수학과 천문학을 깊이 연구하였다. 그는 구면에서 삼각계산을 기계적인 방법으로 쉽게 할수 있는 계산기인 《량도의》를 만들었다. 복잡한 계산을 기계로 하려는 시도는 다른 나라에서도 있었지만 삼각계산기를 처음으로 만든 사람은 남병길이였다.

제7장. 수 렬

제1절. 수렬의 의미

알아보기 다음 수들의 렬은 어떤 규칙에 따라 늘여놓은것인가?

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100,\ \cdots$$
$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$$
$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

일정한 규칙에 따라 늘여놓은 수들의 렬을 **수렬**이라고 부른다.

수렬을 이루는 매개 수를 그 수렬의 마디라고 부른다. 그리고 처음부터 차례로 첫째 마디, 둘째 마디, 셋째 마디, … 라고 부른다.

마디가 몇개인가를 정할수 있는 수렬을 유한수렬, 마디가 끝없이 많은 수렬을 무한수렬이라고 부른다.

첫째 마디가 a_1, 둘째 마디가 a_2, …, n째 마디가 a_n, …인 수렬을

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

또는 간단히 (a_n)과 같이 표시한다.

수렬 1, 3, 5, 7, 9, … 에서

$n=1$ 이면 $a_1=2\cdot1-1=1$

$n=2$ 이면 $a_2=2\cdot2-1=3$

$n=3$ 이면 $a_3=2\cdot3-1=5$

……………………………

일반적으로 $$a_n=2n-1$$

수렬의 n째 마디 a_n을 그 수렬의 일반마디라고 부른다.

일반마디가 알려지면 수렬은 정해진다.

례 1. 일반마디가 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 인 수렬을 써라.

(풀이) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 에 차례로 $n=1$, 2, 3, … 을 갈아넣으면

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3},\quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4},\ \cdots$$

따라서 수렬은

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots$$

수렬을 주는데서 $a_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$의 값을 하나하나 다 지적할 대신에 첫째 마디 a_1과 a_n의 값으로부터 a_{n+1}의 값을 정할수 있는 관계식만 지적하여도 수렬 (a_n)은 정해진다. 이때 이웃한 마디사이의 관계를 주는 식을 **점화식**이라고 부른다.

례 2. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$ 는 어떤 수렬을 정하는가?

(풀이) $a_1 = 3,\ \ a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5,\ \ a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2,\ \ \cdots$

이므로 수렬

3, 5, 7, …

이 정해진다.

점화식으로 주어진 수렬에서는 값이 알려진 처음 몇개 마디에 기초하여 같은 계산을 반복하게 되므로 콤퓨터를 리용하여 문제를 풀 때 아주 편리하다.

문 제

1. 다음과 같은 수렬을 써라.

1) 1에서 40까지의 자연수가운데서 4의 배수로 된 수렬

2) 1에서 30까지의 자연수가운데서 씨수로 된 수렬

2. 다음 수렬은 어떤 규칙에 따라 만들어졌는가? 일반마디를 구하여라.

1) 2, 8, 14, 20, …

2) 1, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{16}$, …

3) $\frac{3}{1}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $-\frac{9}{7}$, …

4) 1, 0, 1, 0, …

3. 다음 점화식은 어떤 수렬을 정하는가?

1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \ (n = 1, \ 2, \ \cdots) \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = -2a_n + 3 \ (n = 1, \ 2, \ \cdots) \end{cases}$

련습문제

1. 다음 수렬의 일반마디를 구하여라.

1) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, …

2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, …

3) −5, −5, −5, …

2. 일반마디가 다음과 같은 수렬을 써라.

1) $a_n = n^2 + 1$　　2) $a_n = n^2 + 2n - 3$

3) $a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n}$　　4) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

3. 다음과 같은 수렬을 다섯째 마디까지 써라.

1) $(2 - 3n)$　　2) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

3) $\left((-2)^n\right)$　　4) $\left(\sin\frac{3n}{2}\pi\right)$

4. 다음 조건에 맞는 수렬의 마디를 써라.

1) $a_n = 2n - 5$, $a_n > 100$　　2) $b_n = 3n - 100$, $b_n \leq 30$

5. 다음 점화식은 어떤 수렬을 정하는가?

1) $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{a}{a_n} \ (n=1,\ 2,\cdots) \end{cases}$　　2) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n + 5 \ \ (n=1,\ \ 2,\cdots) \end{cases}$

제2절. 같은차수렬

1. 같은차수렬과 그 일반마디

알아보기 다음 수렬에서 이웃한 두마디의 차들을 구하여라. 무엇을 알수 있는가?

1) 2, 7, 12, 17, …

2) 19, 15, 11, 7, …

> 수렬 (a_n) 에서 이웃한 두마디의 차가 늘 같을 때 즉
>
> $$a_{n+1} - a_n = d \quad (n=1,\ 2,\cdots)$$
>
> 일 때 이 수렬을 **같은차수렬**, 수 d를 **공통차**라고 부른다.
>
> (a_n) : 같은차수렬 ⇔ $a_{n+1} - a_n = d \ \ (n=1,\ \ 2,\ \ \cdots)$

례 1. 다음 수렬이 같은차수렬임을 밝히고 공통차를 구하여라.

1) 3, 7, 11, 15, …　　　　2) $(3-2n)$

(풀이) 1) 7－3＝4, 11－7＝4, 15－11＝4, …

이므로 1)은 공통차가 d＝4인 같은차수렬이다.

2) $a_n = 3-2n$

$$a_{n+1} - a_n = 3-2(n+1)-(3-2n) = 3-2n-2-(3-2n)$$
$$= -2 \ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

이므로 2)은 공통차가 d＝-2인 같은차수렬이다.

첫째 마디 $a_1=a$와 공통차 d가 주어지면 같은차수렬이 정해진다.

$$d=a_{n+1}-a_n \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

으로부터 점화식

$$\begin{cases} a_1=a \\ a_{n+1}=a_n+d \ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

을 얻는다. 이때

$$a_1=a$$
$$a_2=a+d$$
$$a_3=a_2+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=a+3d$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

이므로 그 일반마디는 다음 공식으로 표시된다.

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

례 2. 첫째 마디가 10, 공통차가 -2인 같은차수렬의 21번째 마디를 구하여라.

(풀이) $a_1=10$, $d=-2$, $n=21$이므로

$a_{21}=10+(21-1)(-2)=-30$

례 3. $a_2=\frac{1}{2}$, $a_5=\frac{1}{3}$인 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차, 일반마디를 구하여라.

(풀이) $a_2=a_1+d=\frac{1}{2}$, $a_5=a_1+4d=\frac{1}{3}$이므로

a_1과 d에 관한 련립1차방정식

$$\begin{cases} a_1+d=\frac{1}{2} \\ a_1+4d=\frac{1}{3} \end{cases}$$

을 풀면

$$a_1 = \frac{5}{9}, \quad d = -\frac{1}{18}$$

일반마디는

$$a_n = \frac{5}{9} + (n-1)\left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{11-n}{18}$$

문 제

1. 다음과 같은 같은차수렬의 11번째 마디를 구하여라.

1) $a_1=3$, $d=5$　　2) $a_1=8$, $d=-2$

3) $a_1=-10$, $d=3$　　4) $a_1=-1$, $d=-4$

2. 다음과 같은 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차를 구하여라.

1) $a_7=1$, $a_{15}=-11$　　2) $a_3=-1$, $a_6=10$

3. 넷째 마디가 12이고 둘째 마디와 여섯째 마디의 비가 1∶3인 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차를 구하여라.

4. 첫째 마디가 81이고 공통차가 -3인 같은차수렬의 몇째 마디가 -51로 되는가?

2. 같은차수렬의 합

같은차수렬

$$4, 7, 10, 13, 16, \cdots$$

의 처음 5개 마디의 합 S_5는 다음과 같이 계산하면 간단히 구해진다.

$$S_5=4+7+10+13+16$$

이것을 달리 쓰면

$$S_5=16+13+10+7+4$$

변끼리 더하면

$$2S_5=20+20+20+20+20$$

따라서 구하려는 합 S_5은

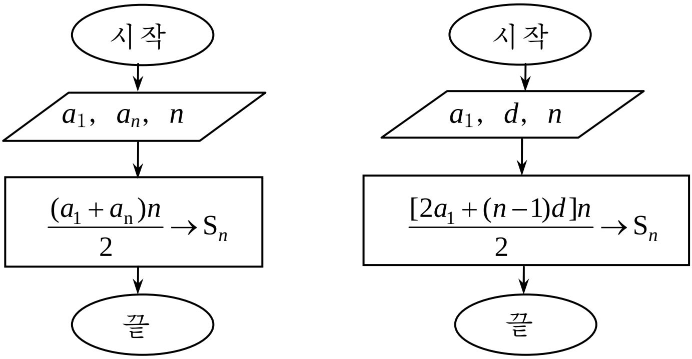
$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 = 50$$

해보기 첫째 마디 a_1과 n째 마디 a_n이 주어졌을 때 처음 n개 마디의 합 S_n을 구하는 공식을 만들어보아라.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

첫째 마디 $a_1 = a$ 와 공통차 d가 주어진 경우에는 $a_n = a + (n-1)d$ 이므로 다음 공식으로 합을 계산한다.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$



례 1. 1부터 n까지의 자연수들의 합을 구하여라.

(풀이) $a_1=1$, $a_n=n$이므로

$$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

례 2. $a_3=12$, $a_6=27$인 같은차수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 297로 되겠는가?

(풀이) 먼저 첫째 마디 a_1과 공통차 d를 구하자.

$$a_3=a_1+2d\ ,\quad a_6=a_1+5d \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} a_1+2d=12 \\ a_1+5d=27 \end{cases}$$

이것을 풀면 $a_1=2$, $d=5$

구하려는 마디의 개수를 n이라고 하면

$$S_n=\frac{n}{2}[2\cdot2+(n-1)\cdot5]=297$$

정돈하면 $5n^2-n-594=0$

이것을 풀면 $n_1=11$, $n_2=-10.8$

n은 마디의 개수이므로 부수로 될수 없다. 따라서 구하려는 답은 $n=11$이다.

문 제

1. 다음 수렬에서 처음 10개 마디의 합을 구하여라.

1) 3, 1, −1, …　　2) −5, 3, 11, …

2. $a_4=9$, $a_9=-6$인 같은차수렬에서 처음 몇개 마디의 합을 잡으면 -60보다 작아지겠는가?

3. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립한다는것을 증명하여라.

4. 처음 n개 마디의 합이 $S_n=an^2+bn$으로 표시되는 수렬은 같은차수렬이라는것을 밝혀라.

련습문제

1. 다음 수렬이 같은차수렬일 때 □에 알맞는 수를 써넣어라. 또한 일반마디를 구하여라.

1) 1, 5, 9, □, □, □, …　　2) 7, □, 1, □, -5, □, …

3) □, □, 1, 4, □, □, …　　4) -3, □, □, □, □, 0, …

2. 같은차수렬 (a_n)에서 다음것을 구하여라.

1) $a_1=8$, $d=4$일 때 a_{15} =?

2) $a_1=-1.6$, $d=-0.2$일 때 a_{23} =?

3) $a_1=110$, $d=-10$일 때 a_{11} =?

3. 수렬 (a_n)이 같은차수렬이면 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ (n=2, 3, …)이 성립하고 이것의 거꿀도 성립한다는것을 밝혀라.

4. 일반마디가 $a_n=kn+b$ 모양인 수렬은 같은차수렬인가? 왜 그런가?

5. 같은차수렬을 이루는 세 수의 합이 45이고 가장 작은 수는 11이다. 이 수들을 구하여라.

6. 직3각형의 세 변이 같은차수렬을 이룰 때 세 변의 비가 3:4:5라는것을 밝혀라.

7. a_7=2, a_{10}=-7인 같은차수렬에서 몇째 마디가 처음으로 부수로 되는가? 처음 몇개 마디의 합이 가장 크겠는가?

8. 같은차수렬 (a_n)에서 다음것을 구하여라.

1) $a_1=2$, $d=5$일 때 $S_{12}=?$

2) $a_1=1$, $d=-\frac{4}{9}$일 때 $S_{10}=?$

3) $a_n=-2n-3$일 때 $S_{20}=?$

4) $a_n=1-\frac{1}{4}n$일 때 $S_{30}=?$

9. 한 3각형의 가장 작은 각은 30°이고 세 각은 같은차수렬을 이룬다. 이 3각형은 어떤 3각형인가?

10. 시간수만큼 종을 치는 벽시계는 하루에 종을 모두 몇번 치는가?

11. 그림 7-1과 같이 통나무를 쌓았다. 모두 몇대인가?

12. 한 선반공이 1월에는 부속품을 100개 깎고 6월까지는 매달 전달보다 15개씩 더 깎았는데 기술혁신운동을 힘있게 벌려 7월부터는 매달 전달보다 30

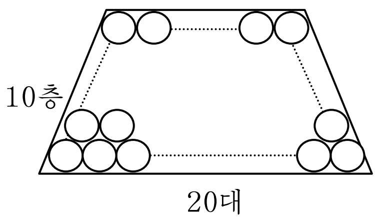


그림 7－1

대씩 더 깎았다. 이 선반공이 한해동안에 깎은 부속품은 모두 몇개인가?

13. 한곳에 30대의 세멘트전주가 쌓여있다.
이곳에서 1 000m 되는 곳에 한대의 전주를 세우고 그다음부터는 50m 사이를 두고 전주를 세우려고 한다. 한번에 전주를 3대씩 싣는 자동차로 30대의 전주를 다 실어나르고 처음 자리로 돌아오려면 자동차는 모두 몇km를 달려야 하는가?

14. 같은차수렬의 n째 마디는 $\frac{1}{m}$, m째 마디는 $\frac{1}{n}$이다. $(m\neq n)$ 이 수렬의 처음 mn개 마디의 합을 구하여라.

15. 세자리수들가운데서 2와 3으로 완제되는 수들의 합과 2 또는 3으로 완제되는 수들의 합을 구하여라.

제3절. 같은비수렬

1. 같은비수렬과 그 일반마디

알아보기 다음 수렬에서 이웃한 두 마디의 비를 구하여라. 무엇을 알수 있는가?

1) 1, 3, 9, 27, …　　2) 2, -6, 18, -54, …

수렬 (a_n)의 이웃한 두 마디의 비가 늘 같을 때 즉

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

일 때 이 수렬을 **같은비수렬**, 수 q를 **공통비**라고 부른다.

$$(a_n):\text{같은비수렬} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

례 1. 다음 수렬이 같은비수렬임을 밝히고 그 공통비를 구하여라.

1) 3, 6, 12, 24, … 2) $(3 \cdot 2n)$

(풀이) 1) $\frac{6}{3}=2$, $\frac{12}{6}=2$, $\frac{24}{12}=2$, …

이므로 1)은 공통비가 $q=2$인 같은비수렬이다.

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 2^n}=2$ $(n=1, 2, \cdots)$이므로 2)는 공통비가 $q=2$인 같은비수렬이다.

첫째 마디 $a_1=a$ $(\neq 0)$와 공통비 $q(\neq 0)$가 주어지면 같은비수렬이 정해진다.

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

로부터 점화식

$$\begin{cases} a_1=a \\ a_{n+1}=qa_n \ (n=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

을 얻는다.

이때

$$\begin{aligned} &a_2=aq, \\ &a_3=a_2q=aq^2, \\ &a_4=a_3q=aq^3, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

이므로 그 일반마디는 다음 공식으로 표시된다.

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

례 2. 첫째 마디가 -5, 공통비가 3인 같은비수렬의 여섯째 마디를 구하여라.

(풀이) $a_1=-5$, $q=3$, $n=6$이므로

$$a_6=(-5)\cdot 3^{6-1}=-1215$$

례 3. $a_5=-48$, $a_8=384$인 같은비수렬의 첫째 마디와 공통비를 구하여라.

(풀이) 첫째 마디를 a_1, 공통비를 q라고 하면

$a_5=a_1q^4$, $a_8=a_1q^7$이므로

$$\begin{cases} a_1q^4=-48 \\ a_1q^7=384 \end{cases}$$

변끼리 나누면 $q^3=-8$

이로부터 $q=-2$

따라서 $a_1=\dfrac{-48}{(-2)^4}=-3$

문 제

1. 다음 수렬가운데서 같은비수렬을 갈라내고 그 공통비가 얼마인가를 말하여라.

1) 1, 4, 6, … 2) 12, 6, 3, …

3) (n^2) 4) $((-2)^n)$

2. 다음 같은비수렬의 일곱째 마디를 구하여라.

1) 1, 3, 9, … 2) 2, -1, $\dfrac{1}{2}$, …

3) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, …

3. 넷째 마디가 32, 여섯째 마디가 8인 같은비수렬의 다섯째 및 일곱째 마디를 구하여라.

4. 4개의 치차의 직경들이 같은비수렬을 이룬다. 가장 작은 치차의 직경이 6cm, 가장 큰 치차의 직경이 48cm일 때 나머지 두 치차의 직경을 구하여라.

2. 같은비수렬의 합

같은비수렬$(2\cdot3^{n-1})$의 처음 5개 마디의 합 S_5는 다음과 같이 하면 쉽게 구할수 있다.

$$S_5=2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4$$
$$3\cdot S_5=2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5$$

변끼리 덜면

$$(1-3)S_5=2-2\cdot3^5=2(1-3^5)$$

이로부터

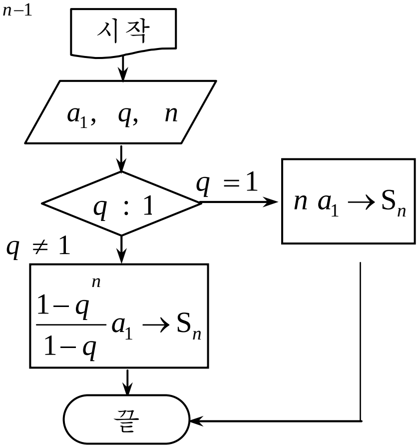
$$S_5=\frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

해보기 첫째 마디가 a_1, 공통비가 q인 같은비수렬의 처음 n개 마디의 합 S_n을 구하는 공식을 만들어보아라.

$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots a_1q^{n-1}$

$q=1$일 때 $S_n=?$

$q\neq1$일 때 $S_n=?$



$q=1$ 일 때 $S_n=na_1$

$q\neq1$ 일 때 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}a_1$

례 1. 같은비수렬 1, 2, 4, 8, …의 처음 8개 마디의 합을 구하여라.

(풀이) $a_1=1$, $q=2$, $n=8$이므로

$$S_8=\frac{1-2^8}{1-2}=255$$

례 2. $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{1}{8}$, $q>0$ 인 같은비수렬의 처음 6개 마디의 합을 구하여라.

(풀이) 먼저 공통비 q를 구하자.

$a_3=a_1q^2$이므로

$$\frac{q^2}{2}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $q=\dfrac{1}{2}$

그러므로

$$S_6=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^6}=\frac{63}{64}$$

문 제

1. 다음 같은비수렬의 처음 8개 마디의 합을 구하여라.

1) $a_1=3$, $q=2$ 2) $a_1=8$, $q=-\frac{1}{2}$

3) $a_1=-8$, $q=-1$ 4) $a_1=5$, $a_3=20$

2. 첫째 마디가 1이고 공통비가 3인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 364로 되겠는가?

3. 첫째 마디가 11이고 공통비가 2인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 1 000보다 크게 되겠는가?

4. 처음 n개 마디의 합이 $S_n=a^n-1$로 표시되는 수렬은 같은비수렬이라는것을 밝혀라.

련습문제

1. 다음 수렬이 같은비수렬일 때 □에 알맞는 수를 써넣어라. 또한 일반마디를 구하여라.

1) 3, □, 12, □, … 2) □, 5, □, 45, □, …

3) 8, □, □, 1, … 4) □, 5, □, □, $\frac{1}{25}$, …

2. 같은비수렬 (a_n)에서 다음것을 구하여라.

1) $a_1=140$, $q=\frac{1}{2}$일 때 $a_{10}=$?

2) $a_1=\frac{5}{9}$, $a_6=135$일 때 $q=$?

3) $q=\frac{1}{2}$, $a_7=7$일 때 $a_1=$?

4) $a_1=-3$, $q=2$, $a_n=-768$일 때 $n=$?

5) $a_5=12$, $a_9=60$일 때 $a_1=$?

3. 수렬 (a_n) $(a_n>0)$이 같은비수렬이면 $a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$ $(n\geq 2)$이 성립하고 이것의 거꿀도 성립한다는것을 밝혀라.

4. 다음 수들을 구하여라.

1) 같은비수렬을 이루는 세 수의 적이 64이고 가장 작은 수는 2이다.

2) 같은비수렬을 이루는 세 수의 합이 19이고 그 적이 216이다.

5. 4와 324사이에 3개의 수를 넣어 5개의 수가 같은비수렬을 이루도록 하여라.

6. 다음과 같은 같은비수렬의 첫째 마디와 일반마디를 구하여라.

1) $a_8=384$, $q=2$　　2) $a_5=\frac{4}{9}$, $q=-\frac{2}{3}$

7. 한 공장에서 2000년-2006년에 생산이 해마다 평균 14.6%씩 늘어났다.

2006년의 생산은 1999년에 비하여 몇배로 늘어났는가?

8. 같은비수렬 (a_n)에서 다음것을 구하여라.

1) $a_1=3$, $q=2$일 때 $S_8=?$　　2) $a_1=8$, $q=-\frac{1}{2}$일 때 $S_{10}=?$

3) $a_1=32$, $a_6=1$일 때 $S_6=?$　　4) $a_2=-32$, $a_5=4$일 때 $S_7=?$

9. $a_2=-54$, $a_4=-24$ 인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 55로 되겠는가?

10. 한 같은비수렬의 처음 10개 마디의 합이 처음 5개 마디의 합의 244배와 같다. 이 수렬의 공통비를 구하여라.

11. 어떤 세균이 한시간동안에 한번씩 분렬하여 2배로 증식한다. 이런 세균 한개가 12시간동안 증식하면 몇개로 되겠는가?

12. 어떤 낟알 한알을 심어 110알을 얻고 다음해에는 그것을 모두 심어 매 낟알에서 또 각각 110알씩 얻는다고 하면 5년동안에 심은 낟알은 몇알이나 되겠는가?

제4절. 여러가지 수렬

같은차수렬도 아니고 같은비수렬도 아닌 비교적 간단한 몇가지 수렬의 합을 구하자.

례 1. 수렬 (n^2)의 처음 n개 마디의 합

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

을 구하여라.

(풀이) 늘같기식

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

에서

$$k=1\text{이면 } 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$

$$k=2\text{ 이면 } 3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$k=n\text{이면 } (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

이 n개의 같기식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

이로부터

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

이리하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

례 2. 수렬 (na^{n-1}) $(a\neq1)$의 처음 n개 마디의 합

$$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$$

을 구하여라.

(풀이) 이 합을 S_n으로 표시하면

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1} \\ -)\ aS_n= & \quad\ \ a+2a^2+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n \\ \hline (1-a)S_n= & 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1} \qquad -na^n \end{array}$$

따라서 $(1-a)S_n=\dfrac{1-a^n}{1-a}-na^n$

$$S_n=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$$

이로부터

$$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}=\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}$$

문 제

1. 다음 합을 구하여라.
$10^2+11^2+\cdots+20^2$

2. 다음 합을 구하여라.
1) $1+3b+5b^2+\cdots+(2n-1)b^{n-1}$
2) $1+4a+9a^2+\cdots+n^2a^{n-1}$
3) $1+\dfrac{4}{7}+\dfrac{7}{7^2}+\cdots+\dfrac{3n-2}{7^{n-1}}$

3. 다음 합을 구하여라.
$1^3+2^3+\cdots+n^3$
(참고. 늘같기식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 리용)

수렬의 합을 표시하는데 기호 ∑(시그마)를 리용하면 간단하고 편리할 때가 많다.

례를 들어

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

여기서 $\sum_{k=1}^{n}$ 은 k자리에 1부터 n까지의 자연수를 차례로 넣은 것을 모두 더하라는 기호이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k$ 에서 첨수 k를 다른 글자로 바꾸어도 의미는 같다.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

합을 ∑를 써서 표시하자면 더하는 수들의 k째 마디를 알면 된다.

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k\ (a_k=k)$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\,(a_k=k^2)$$

기호 ∑는 다음과 같은 성질을 가진다.

1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c는 k에 무관계한 수)

례 1. $\sum_{k=1}^{3}(k^2+5k)=\sum_{k=1}^{3}k^2+\sum_{k=1}^{3}5k=\sum_{k=1}^{3}k^2+5\sum_{k=1}^{3}k$

$$=(1^2+2^2+3^2)+5(1+2+3)$$

례 2. $\sum_{k=1}^{3}c=c+c+c=3a \quad (a_k=c)$

특히 $\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n \ (a_k=1)$

문 제

1. 다음 수렬의 처음 n개 마디의 합을 $\sum$를 써서 표시하여라.

1) 1, 8, 27, 64, …

2) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, …

3) 1・3, 2・5, 3・7, …

4) 4^2, 7^2, 10^2, …

5) 3, 3, 3, …

6) a, aq, aq^2, …

2. 다음 합을 구하여라.

1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-4)$

2) $\sum_{k=1}^{n}k(k^2-1)$

련습문제

1. 다음 합을 $\sum$를 쓰지 말고 표시하여라.

1) $\sum_{k=1}^{5}\frac{2k}{k+1}$

2) $\sum_{i=1}^{9}2^{i+1}$

3) $\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h_j$

2. 다음 합을 합기호를 써서 표시하여라.

1) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$

2) $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_{50}}{b_{50}}$

3) $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$　4) $a_1 f(b_1)+a_2 f(b_2)+\cdots+a_n f(b_n)$

3. 다음 합을 구하여라.

1) 9, 99, 999, 9 999, …　　2) 1, 11, 111, 1 111, …

4. 다음 합을 구하여라.

1) $1+3+7+\cdots+(n^2-n+1)$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

3) $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}-\dfrac{7}{2^3}+\dfrac{9}{2^4}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$

4) $x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots+(-1)^{n-1}nx^n$

5) $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\dfrac{1}{6^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2-1}$

5. 일반마디가 $a_n=n^2+n+1$인 수렬의 처음 n개 마디의 합을 구하여라.

6. $S_1=1$, $S_2=1+2$, …, $S_n=1+2+\cdots+n$일 때 합 $\sum_{k=1}^{n} S_k$ 를 구하여라.

복습문제

1. 다음 수렬의 일반마디를 구하고 15째 마디를 써라.

1) $1,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{7},\ \cdots$　　2) $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{6}{7},\ \dfrac{8}{9},\ \cdots$

3) $1,\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{5},\ \cdots$　　4) $-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots$

2. 같은차수렬 (a_n)에 대하여 만든 다음 표에서 빈 칸에 알맞는 수를 써넣어라.

번호	a_1	d	n	a_n	S_n
1	7		9	79	
2	1	5		61	
3		3	31		0
4	1		7		49
5		2	15	−10	
6	8	−2			14

3. 수렬 (a_n)과 (b_n)이 같은차수렬이면 (a_n+b_n)도 같은차수렬이라는 것을 증명하여라.

4. 어떤 같은차수렬의 둘째 마디와 넷째 마디의 합이 6이고 셋째 마디와 다섯째 마디의 합이 8이다. 이 같은차수렬에서 열째 마디까지의 합을 구하여라.

5. 같은비수렬 (a_n)에 대하여 만든 다음 표에서 빈 칸에 알맞는 수를 써넣어라.

번호	a_1	q	n	a_n	S_n
1	1	3	6		
2		$\frac{1}{2}$	8	2	
3	2		7	1 458	
4		3		567	847

6. 같은차수렬을 이루는 세 수의 합이 21이다. 이 수들에 각각 2, 3, 9를 더하면 같은비수렬이 된다. 이 수들을 구하여라.

7. 같은비수렬을 이루는 세 수의 합이 26이다. 이 수들에 각각 1, 6, 3을 더하면 같은차수렬로 된다. 이 수들을 구하여라.

8. 첫째 마디가 50, 공통차가 -3인 같은차수렬이 있다. 이 수렬에서 몇째 마디가 처음으로 부수가 되는가?

9. 200부터 300까지의 옹근수가운데서 7로 나누어 나머지가 1이 되는 수는 몇개 있는가? 그것들의 합을 구하여라.

10. 첫째 마디가 2이고 공통비가 -2인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 -10으로 되겠는가?

11. 2, 5, 10, 17, 26, … 의 일반마디를 구하여라.

12. 16, -8, 4, -2, 1, …의 일반마디를 구하고 그 n째 마디까지의 합을 구하여라.

13. 경제적으로 쓸모있는 나무를 많이 심을데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**원수님의 말씀을 높이 받들고 한 농장에서는 올해에 10정보의 기름나무림을 조성하였다. 이 농장에서 다음해부터 기름나무림을 매해 그 전해의 10%씩 더 조성한다면 8년후에는 모두 몇정보의 기름나무림을 조성하겠는가?

14. 20L의 알콜이 들어있는 통에서 알콜 1L를 퍼내고 그만큼 물을 채웠다. 다시 그 통에서 1L를 퍼내고 물을 그만큼 넣었다. 이렇게 10번 되풀이하면 통안에 알콜이 얼마나 남겠는가?

아직도 풀리지 않은 문제- 골드바흐문제

18세기에 활동한 도이췰란드의 수학자 골드바흐는 당시 유명한 수학자였던 오일레르에게 다음과 같은 문제를 편지로 보내였다.

《4보다 작지 않은 모든 짝수는 두개의 씨수의 합으로 표시되고 7보다 작지 않은 모든 홀수는 세개의 씨수의 합으로 표시된다.》

이에 대하여 오일레르는 회답편지를 보냈는데 거기에서 《그 추측은 믿을수 있으나 증명하지 못하였다.》고 썼다고 한다. 그리하여 이 문제가 유명해지게 되였다.

세계의 수많은 학자들이 이것을 증명하려고 시도하였지만 아직까지 완전히 증명하지 못하였다. 다만 일부 부분적인 경우에만 증명되였을뿐이다.

상용로그 수표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294.	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3596
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4424	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6210	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8041	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8229	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8917
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

삼각비의 수표

각	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

각	sin	cos	tan
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	

복습문제의 답

제1장

1. 27.2cm **2.** 35cm, 40cm, 45cm **3.** $\ell_i = \dfrac{(n-i)a+ib}{n}\quad (i=\overline{1,\ n-1})$ **4.** AP＝AQ **6.** $\dfrac{1}{10}$ **7.** 75° **9.** 14m **14.** 2) $\mathrm{EF}=\dfrac{6}{5}x$, $\mathrm{DE}=4\left(1-\dfrac{x}{5}\right)$ 3) 둘레: $8+\dfrac{4}{5}x$, 면적: $\dfrac{24}{25}(5x-x^2)$ 4) $x=\dfrac{5}{2}$cm 5) x＝2cm **15.** 1 067m **16.** r＝9.2cm, R＝9.7cm **17.** 1) $\dfrac{1}{3}$ 2) 3, 3 **18.** $\dfrac{1}{m}$, m **19.** 68.57m

제2장

5. 1) 짝함수 2) 짝함수 3) 짝함수 4) 홀함수 5) 홀함수 6) 홀함수 **6.** $0<a<1$일 때 제일 큰 수 $\sqrt[n+1]{a^{n-1}}$, 제일 작은수 $\sqrt[n-1]{a^{n+1}}$ $a>1$일 때 제일 큰 수 $\sqrt[n-1]{a^{n+1}}$, 제일 작은 수 $\sqrt[n+1]{a^{n-1}}$ **7.** 1) 1 2) $b^{\frac{3}{5}}$ **8.** 1) $2\sqrt{b}$ 2) $\dfrac{32}{1-a^2}$ 3) 1 **9.** 1) 2 2) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{-2}$ **10.** $\dfrac{119}{110}$

제3장

1. 1) $\{3\}$ 2) $\{2\}$ 3) $\left\{\dfrac{1-\sqrt{865}}{18},\ \dfrac{1+\sqrt{865}}{18}\right\}$ 4) $\{-3,\ -6\}$

2. 1) $\left\{\dfrac{11}{2}\right\}$ 2) $\{-5,\ 3\}$ 3) $\{-1,\ 6\}$ 4) $\left\{\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}\right\}$ 5) $\left\{\dfrac{79}{3}\right\}$

3. 1) $\{25\}$ 2) $\{2\}$ 3) $\{1\}$ **4.** 15km/h **5.** 1) $(-\infty,\ -1)$ 2) $\left(-\infty,\ \dfrac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{19}}{3},\ +\infty\right)$ 3) $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{3}{2}\right)\cup(2,\ +\infty)$

6. 1) $[0,\ 1)$ 2) $[-1,\ 3]$ 3) $\left[-1,\ 6-\sqrt{13}\right)$ **7.** 1) $(1,\ +\infty)$

2) (3, 11) 3) ϕ 4) $\left[0,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ 2\right]$ **8.** 1) A=2, B=3, C=-1 2) A=2, B=-2, C=4, D=-5

제4장

2. $4\sqrt{6}$ cm **3.** $50\sqrt{\frac{10}{7}}$cm, $50\sqrt{\frac{10}{3}}$cm **5.** $\frac{a^2+b^2}{a}$ **6.** 20cm **8.** 43.6cm **9.** $\sqrt{(\ell+r)^2-h^2}-\sqrt{(\ell-r)^2-h^2}$ **10.** 2등변3각형 **13.** 18cm

제5장

1. 4) **4.** 1) $a+b$ 2) $2a+b$ **7.** 1) $\frac{1}{729}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) 2 4) $\frac{1}{100}$ 5) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ 6) 1 000 **8.** 1) 18 2) $\frac{7}{128}$ 3) $\frac{15}{2}$ 4) $\frac{25}{4}$ **11.** 1) 534.6mm수은기둥 2) 5 418.54m

제6장

2. 1) $-\sin 10^\circ$ 2) $-\sin 25^\circ$ 3) $-\cot 25^\circ$ **3.** $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\tan\alpha=\frac{5}{12}$ **4.** 1) $1+\sin 2\alpha$ 2) $\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$ 3) $\tan^2\alpha-1$ 4) $\frac{1}{\sin^2\beta}$ **5.** 1) 1 2) $\cot^2\alpha$ **6.** 1) $-\cot 10^\circ$ 2) $\cos\alpha$ **14.** $-\frac{24}{25}$

제7장

4. 55 **6.** 3, 7, 11 **7.** 2, 6, 18 **8.** 18번째 마디 **9.** 14개, 3 493 **10.** 4개 **11.** $a_n=1+n^2$ **12.** $a_n=(-2)^{5-n}$, $S_n=\frac{32}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$ **13.** 21.4정보 **14.** 약 12L

수 학(중학교 제4학년용)

집 필 교수 박사 류해동, 교수 박사 서기영, 부교수 남호석, 부교수 김희일

심 사 심의위원회

편 집 리혜경 콤퓨터편성 홍경희

장 정 홍경희 교 정 리분희

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소 평양고등교육도서인쇄공장

인 쇄 주체100(2011)년 11월 28일 발 행 주체100(2011)년 12월 8일

교-11-보-366 값 10 원